



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 01. Элементы теории множеств и математической логики

Лекция № 01. Логические символы и операции над множествами

Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Логическая символика
3. Элементы теории множеств

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и
спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.-
2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа:
учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и
физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва:
Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -
(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-
00101-039-5.

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ, наряду с линейной алгеброй и аналитической геометрией, является дисциплиной, с которой начинается изучение математики в техническом университете. Под термином «математический анализ» подразумевается прежде всего дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем в XVII в.

К настоящему времени математический анализ превратился в дисциплину, состоящую из многих частей: теории пределов и непрерывности, дифференциального и интегрального исчисления функций одного и нескольких переменных, теории рядов, обыкновенных дифференциальных уравнений, комплексного анализа.

В первом семестре нам предстоит познакомиться с вещественными числами, понятиями предела и непрерывности, дифференциальным исчислением для функций одного вещественного переменного, неопределенным интегралом.

1. Логическая символика

При изложении курса математического анализа широко используются логические символы: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, равносильность.

Символ	Название	Описание
$\neg$	отрицание	Запись $\neg A$ означает "не A ", отрицание суждения A
$\vee$	дизъюнкция	$\vee$ заменяет союз "или". Запись $A \vee B$ означает

		справедливость хотя бы одного из суждений A, B .
$\wedge$	конъюнкция	$\wedge$ заменяет союз "и". Запись $A \wedge B$ означает, что справедливость оба суждения A, B .
$\Rightarrow$	знак следования (импликация)	Запись $A \Rightarrow B$ означает, что B следует из A , B необходимо для A , A достаточно для B .
$\Leftrightarrow$	равносильность	Запись $A \Leftrightarrow B$ означает равносильность суждений A, B .
$\forall$	квантор общности	заменяет слова: для любого, для каждого.
$\exists$	квантор существования	заменяет слова: существует, найдется

Важные соотношения

$$\begin{aligned}
 \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\
 \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \\
 (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\
 (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow \neg A \vee B
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

При формировании отрицаний для утверждений с кванторами следует менять тип квантора:

$$\neg((\forall x)(A(x))) \Leftrightarrow ((\exists x)(\neg A(x))) \quad (2)$$

$$\neg((\exists x)(A(x))) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x)) \quad (3)$$

2. Элементы теории множеств

1⁰. Множество.

Множество — начальное понятие математики. Можно привести синонимы: набор, совокупность, система, класс.

Множество состоит из *элементов*, запись $x \in X$ означает, что x — элемент множества X , что x *принадлежит* X . Множество однозначно определяется набором своих элементов,

$$X = Y \Leftrightarrow \forall x (x \in X \Leftrightarrow x \in Y). \quad (1)$$

Формулы $\{x | P(x)\}$ и $\{x : P(x)\}$ обозначают множество всех элементов, обладающих свойством P .

Может случиться, что свойством P ни один элемент не обладает. Мы приходим к *пустому* множеству $\emptyset$, которое не имеет элементов.

2⁰. Отношение включения.

Запись $A \subset B$ означает, что

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B). \quad (2)$$

Говорят, что A *содержится* в B , B *содержит* A , A — *подмножество* множества B .

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то говорят, что A — *собственное подмножество* множества B .

3⁰. Объединение.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}, \quad (3)$$

состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B .

4⁰. Пересечение.

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad (4)$$

состоящее из всех элементов, которые принадлежат одновременно множествам A, B .

Операции объединения и пересечения коммутативны и ассоциативны, связаны между собой дистрибутивными законами:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned} \quad (5)$$

5⁰. Разность.

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}, \quad (6)$$

состоящее из всех элементов, которые принадлежат A , но не принадлежат B .

Разность между множеством M и содержащимся в нем множеством A называют дополнением A в M и обозначают через CA .

Отметим в связи с этим *формулы дополнения де Моргана*

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad (7)$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright x \in C(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x \in CA \wedge x \in CB) \Leftrightarrow x \in CA \cap CB \blacktriangleleft$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем символы $\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft$ означают соответственно начало и конец доказательства.

6⁰. Декартово произведение множеств.

Множество

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}, \quad (8)$$

образованное всеми упорядоченными парами (x, y) , где первый член $x \in X$, а второй — $y \in Y$, называется *декартовым произведением* множеств X, Y .

Известная всем декартова система на плоскости превращает плоскость в произведение двух осей.

Для упорядоченной пары $z = (x, y)$ элемент x называют первой координатой, а элемент y — второй координатой.

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.