ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 01 Введение в математический анализ

Тема № 04 Предел функции

Лекция № 10 Сравнение бесконечно малых

Учебные вопросы:

1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции
2. Сравнение функций (бесконечно малых)
3. Предел монотонной функции
4. Критерий Коши существования предела

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

1^0. Определение. Функция α называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.

2^0. Теорема 1. 1*) Сумма бесконечно малых является бесконечно малой.*

2) Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой.

3^0. Теорема 2. Описание предела в терминах бесконечно малых.

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} A \Leftrightarrow \alpha = f - A - \text{ б.м.} \tag{1}$$

4^0. Бесконечно большие функции.

Определение. Функция f называется *бесконечно большой* ($f(x) \underset{x\to a}{\to} \infty$), если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \mathrm{E}. \tag{2}$$

Теорема 3. Если α нигде не обращается в нуль, то

$$\alpha - \text{б.м.} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \textit{б.б.}$$

2. Сравнение функций (бесконечно малых)

1^0. Определение. Пусть функции α, β определены в некоторой проколотой окрестности точки a, β не обращается в 0 ни в одной точке.

1) Говорят что α, β *одного порядка* при $x \to a$, если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} A \neq 0, \infty. \tag{1}$$

Для бесконечно малых функций α, β в этом случае говорят, что функции α и β *одного порядка малости*.

2) α, β *эквивалентны* при $x \to a$, $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$, если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} 1. \qquad (2)$$

Замечание. В условиях пункта 1) $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} A\beta(x)$.

3) Функцию α называют *бесконечно малой по сравнению с* β *и пишут* $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} o(\beta(x))$ (α есть *о-малое* от β), если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} 0. \qquad (3)$$

Для бесконечно малых функций α, β в этом случае говорят, что функция α *имеет более высокий порядок малости*, чем β.

Замечание. В смысле принятого определения запись $\alpha = o(1)$ означает бесконечную малость функции α.

4) $\alpha \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(\beta)$, если $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки a.

Примеры. $x + 2x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x,\ x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

2^0. Определение. Пусть α, β —б.м.

1) Если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} A\left(\beta(x)\right)^k$, то говорят, что α имеет k-й порядок относительно β.

2) Если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} A(x-a)^k$, то α имеет k*-й порядок малости*, функция $A(x-a)^k$ называется *главной частью* б.м. α. (Для случая $x\to\infty$ роль основной б.м. выполняет функция $\frac{1}{x}$, функция $\alpha(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{A}{x^k}$ имеет k-й порядок малости, имеет $\frac{A}{x^k}$ своей главной частью).

3^0. Теорема 1. *При вычислении пределов* ***сомножители*** *можно заменять на эквивалентные. Пусть* $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_1(x)$, $\beta(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta_1(x)$. *Тогда*

1) Если $\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \underset{x\to a}{\to} A$, *то* $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} A$.

2) Если $\alpha_1(x)\beta_1(x) \underset{x\to a}{\to} A$, *то* $\alpha(x)\beta(x) \underset{x\to a}{\to} A$.

3) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

4) $\alpha(x)\beta(x) \underset{x\to a}{\sim} \alpha_1(x)\beta_1(x)$.

▶ 1) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} A\cdot 1\cdot 1 = A$.

4) $\dfrac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)} \underset{x\to a}{\to} 1\cdot 1 = 1$.◀

4^0. Теорема 2. Условие эквивалентности.

$$\text{При } x\to a \qquad \alpha\sim\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta = o(\beta). \qquad (4)$$

▶ $\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}\to 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}-1\to 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\beta}\to 0 \Leftrightarrow \alpha-\beta = o(\beta)$.◀

5^0. Таблица эквивалентных б.м.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\sin x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$	$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$	$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a x}{x}=\frac{1}{\ln a}$	$\log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\ln a}$	$\log_a(1+x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{\ln a}+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$a^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a$	$a^x \underset{x\to 0}{=} 1+x\ln a+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$	$(1+x)^\mu-1 \underset{x\to 0}{\sim} \mu x$	$(1+x)^\mu \underset{x\to 0}{=} 1+\mu x+o(x)$

6^0. Операции с "o".

1) Если β_1, β_2 *одного порядка, то* $o(\beta_1)=o(\beta_2)$.

2) $o(\beta)\pm o(\beta)=o(\beta)$.

З а м е ч а н и е. Равенство следует понимать как утверждение о том, что

$$\text{если } \alpha_1=o(\beta) \text{ и } \alpha_2=o(\beta), \text{ то } \alpha_1\pm\alpha_2=o(\beta).$$

3) $\gamma\cdot o(\beta)=o(\gamma\beta)$, $o(\gamma)\cdot o(\beta)=o(\gamma\beta)$.

4) Если $\alpha=o(\beta)$, $\beta=o(\gamma)$, то $\alpha=o(\gamma)$.

Действительно, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma}\to 0\cdot 0=0$.

Примеры. $x^3 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$, $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, поэтому $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, иными словами $o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Отметим, что в последнем "равенстве" нельзя менять местами левую и правую части.

3. Предел монотонной функции

Определение. Пусть f — функция, определенная на промежутке Δ. Функция f называется

1) *возрастающей (строго возрастающей)*, если

$$\forall x, y \in \Delta\ x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)\ \left(f(x) < f(y)\right). \tag{1}$$

2) *убывающей (строго убывающей),* если

$$\forall x, y \in \Delta\ x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)\ \left(f(x) > f(y)\right). \tag{2}$$

3) Функция называется *(строго) монотонной*, если она (строго) возрастает или (строго) убывает

Теорема 1. *Пусть f — монотонная функция на интервале (a, b). Тогда существуют односторонние пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, может быть, бесконечные.*

▶ Для определенности рассмотрим возрастающую функцию.

1) Пусть f ограничена сверху. Положим $M = \sup f(a, b)$ и покажем, что $f(x) \underset{x\to b-0}{\to} M$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такой $x_0 \in (a, b)$, что $f(x_0) > M - \varepsilon$. Положим $\delta = b - x_0$. Теперь, $\forall x \in (b-\delta, b)$ имеет место неравенство $x > b - \delta = x_0$, поэтому $f(x) \ge f(x_0) > b - \varepsilon$, $M - \varepsilon < f(x) \le M$. Видим, что $f(x) \underset{x\to b-0}{\to} M$.

2) В случае неограниченности $f(x) \underset{x\to b-0}{\to} +\infty$. Действительно, $\forall E>0\ \exists x_0\ f(x_0)>E$. Далее, $\forall x\in(x_0,b)\ f(x)\geq f(x_0)>E$.◀

4. Критерий Коши существования предела

Теорема 1. *Для существования конечного предела* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *необходимо и достаточно условие Коши*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ 0<|x'-a|,|x''-a|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \qquad (1)$$

▶ **1) Необходимость.** Пусть $f(x)\underset{x\to a}{\to} A$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Найдется такое $\delta>0$, что

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любых x', x'', удовлетворяющих условиям $0<|x'-a|,|x''-a|<\delta$ получается неравенство

$$|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-A)-(f(x'')-A)|\leq|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2) Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и подберем $\delta>0$, о котором идет речь в условии Коши. Для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $x_n\to a$ и $x_n\neq a$, найдется такой номер N, что

$$n>N \Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta.$$

Получается, что

$$\forall n,m>N\ |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, следовательно, она сходится. Осталось убедиться в том, что все такие последовательности имеют один и тот же предел. Пусть последовательности $\{x_n'\}, \{x_n''\}$ имеют предел a и состоят из членов, отличных от a. Построим последовательность $\{x_n\}$, полагая $x_{2n-1} = x_n'$, $x_{2n} = x_n''$. Тогда $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $x_n \neq a$, поэтому существует $A = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$. По теореме о пределе подпоследовательности $f\left(x_n'\right), f\left(x_n''\right) \underset{n\to\infty}{\to} A$. ◀

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.