ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01 Введение в математический анализ

Тема № 05 Непрерывные функции

Лекция № 11 Непрерывные функции. Локальные свойства

Учебные вопросы:

1. Понятие непрерывной функции
2. Точки разрыва
3. Локальные свойства непрерывных функций

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

Непрерывные функции

1. Понятие непрерывной функции

1^0. Определение 1. Пусть f — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Непрерывность означает, что малым изменениям x отвечают малые изменения значения функции. Чаще всего в качестве E рассматривается промежуток.

Определение 2. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ можно указать окрестность U точки x_0, для которой $f(U \cap E) \subset V$:

$$\forall V\ \exists U\ f(U \cap E) \subset V. \qquad (2)$$

Определение 3. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\ x_n \in E\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0). \qquad (3)$$

Обычно x_0 — предельная точка множества E. Для такого случая приведем еще

Определение 4. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4)$$

Теорема 1. *Определения 1–4 равносильны.*

2^0. Односторонняя непрерывность.

Определение. 1) Пусть f — функция, определенная по крайней мере на промежутке $\left(x_0-\delta_0,\, x_0\right]$. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если

$$f\left(x_0\right)=f\left(x_0-0\right). \tag{5}$$

2) Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 *справа*, если

$$f\left(x_0\right)=f\left(x_0+0\right). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0. Для непрерывности функции f в точке x_0 необходима и достаточна ее непрерывность в этой точке слева и справа.*

3^0. Приращение функции.

Определение. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0. Положим

$$\Delta f\left(x_0\right)(h)=f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right) \tag{7}$$

для тех h, для которых x_0+h лежит в множестве определения функции. Функция $\Delta f\left(x_0\right)$ называется *приращением* функции f в точке x_0. Приращение определяется в некоторой окрестности нуля.

Теорема 3. *Для непрерывности функции необходима и достаточна бесконечная малость ее приращения:*

f непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ приращение бесконечно мало, $\Delta f\left(x_0\right)(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$.

Замечания. 1) Наряду с обозначением $\Delta f\left(x_0\right)(h)$ будем в том же смысле использовать и запись $\Delta f\left(x_0, h\right)$.

2) Часто вместо h используют символ Δx:
$\Delta f(x_0)(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3) Можно рассматривать приращение в форме $\Delta f(x_0)(x) = f(x) - f(x_0)$.

2. Точки разрыва

Определение 1. Пусть f — функция, определенная на множестве E, x_0 — предельная точка E. x_0 называется точкой разрыва, если f не является непрерывной в этой точке.

x_0 оказывается точкой разрыва, если f не определена в этой точке, не имеет предела или $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Определение 2. Классификация точек разрыва. Пусть функция f определена на множестве, содержащем некоторую проколотую окрестность точки x_0 и x_0 — точка разрыва функции f.

1) x_0 — называется точкой разрыва I рода, если функция имеет конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. Если при этом $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, x_0 — называется точкой устранимого разрыва. Если же $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, x_0 — называется точкой скачка, число $\Delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется величиной скачка.

2) Другие случаи относят к разрывам II рода.

Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, x_0 называется точкой бесконечного разрыва.

Примеры. В точке устранимого разрыв функция имеет конечный предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Разрыв обусловлен тем, что функция не определена или плохо определена в точке x_0. Полагая

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0, \\ A, & x=x_0, \end{cases}$$

мы получим непрерывную функцию. Говорят, что $\tilde{f}$ получена из f устранением разрыва.

Функция $f: f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0$ имеет устранимый разрыв в нуле. Полагая $f(0)=1$, мы получаем непрерывную функцию.

Функция $f: f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ имеет в нуле скачок величины $\Delta=2$.

Функция $f: f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$ имеет в нуле бесконечный разрыв.

Функция $f: f(x)=\sin\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$ имеет в нуле разрыв II рода, функция не имеет односторонних пределов.

3. Локальные свойства непрерывных функций

Свойство непрерывности функции точке x_0 полностью определяется ее поведением в любой окрестности этой точки. Если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки x_0, то они одновременно непрерывны или нет. Имея в виду этот факт, непрерывность в точке называют *локальным* свойством.

1^0. Локальная ограниченность непрерывной функции.

Теорема 1. *Пусть f непрерывна в точке x_0. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т. е. найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(U)$ — ограниченное множество:*

$$\exists M > 0 \ \forall x \in U \ \left|f(x)\right| \le M. \tag{1}$$

▶Подберем $M > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $-M < f(x_0) < M$. Интервал $(-M, M)$ — окрестность точки $f(x_0)$, так что по определению непрерывности найдется окрестность U точки x_0, для которой $f(U) \subset (-M, M)$.◀

2⁰. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Теорема 2. *Пусть* f, g *определены в некоторой окрестности точки* x_0 *и непрерывны в точке* x_0. *Определим функции*

$$\begin{aligned} &F = f + g : F(x) = f(x) + g(x), \\ &G = fg : G(x) = f(x)g(x), \\ &H = \frac{f}{g} : H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned} \tag{2}$$

В последнем случае предполагаем, что $g(x_0) \ne 0$. *Тогда функции* F, G, H *непрерывны в точке* x_0.

▶ Справедливость теоремы следует из соответствующей теоремы о пределах. ◀

3⁰. Стабилизация неравенств.

Теорема 3. *Пусть* f, g *непрерывны в точке* x_0 *и* $f(x_0) < g(x_0)$. *Тогда неравенство справедливо в некоторой окрестности точки* x_0:

$$\exists U \text{ — окрестность точки } x_0, \text{ т. ч. } \forall x \in U \ f(x) < g(x). \tag{3}$$

Следствие. *Пусть* f *непрерывна в точке* x_0. *Тогда*

1) Если $f(x_0) > A$, *то* $f(x) > A$ *в некоторой окрестности точки* x_0;

2) Если $f(x_0) > 0$, *то* $f(x) > 0$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

4^0. Непрерывность композиции.

Теорема 4. *Пусть f определена в окрестности U точки x_0 и непрерывна в этой точке; g определена в окрестности V точки $y_0 = f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Можно считать, что $f(U) \subset V$, так что имеет смысл композиция*

$$F = g \circ f : F(x) = g(f(x)),\ x \in U. \qquad (4)$$

Тогда функция F непрерывна в точке x_0.

Замечание. В случае нарушения условия $f(U) \subset V$ следует уменьшить окрестность U, заменив ее окрестностью U_1, для которой $f(U_1) \subset V$. Существование такой окрестности обеспечивается непрерывностью функции f.

▶ Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in U, x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Тогда по определению непрерывности

$$y_n = f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) = y_0, \text{ а } g(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(y_0).$$

Но $$g(y_n) = g(f(x_n)) = F(x_n),\ g(y_0) = g(f(x_0)) = F(x_0),$$

так что $F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} F(x_0)$, F непрерывна в точке x_0. ◀

Предел композиции. Пусть $F = f \circ \varphi,\ f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A,\ \varphi(t) \underset{t\to t_0}{\to} x_0$. Без дополнительных условий утверждение $F(t) \underset{t\to t_0}{\to} A$ оказывается ложным.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad \varphi(t) = 0.$$

Тогда $$F(t) = 1,\ \ A = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} F(t).$$

Однако, если φ — биекция окрестности U точки t_0 на окрестность V точки x_0, $\varphi(t_0) = x_0$, φ непрерывна в точке t_0, φ^{-1} непрерывна в точке x_0, то соотношения $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} A$ и $F(t) \underset{t \to t_0}{\to} A$ равносильны. На это замечание опирается процедура замены переменной при вычислении пределов.

Пример. Скоро мы установим, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Положим $x = \varphi(t) = e^t - 1 \underset{t \to 0}{\to} 0$. Можем утверждать, что $\lim\limits_{x \to 0} f(\varphi(t)) = 1$. Но

$$f(\varphi(t)) = \frac{\ln(1 + e^t - 1)}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Следовательно, $$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.