



Раздел №. 01 Введение в математический анализ

Тема №. 05 Непрерывные функции

Лекция № 12. Глобальные свойства непрерывных функций

Учебные вопросы:

1. Открытые и замкнутые множества. Компакты
2. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке
3. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции
4. Монотонные функции
5. Равномерная непрерывность функции

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. - (Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

Глобальным называют свойство функции, связанное со всей областью ее определения.

1. Открытые и замкнутые множества. Компакты

1⁰. Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) x_0 называется *внутренней* точкой множества E , если

$$\exists \delta > 0 (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E; \quad (1)$$

2) x_0 называется *внешней* точкой множества E , если

$$\exists \delta > 0 (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E = \emptyset; \quad (2)$$

3) x_0 называется *граничной* точкой множества E , если она не является ни внутренней, ни внешней, т. е. если

$$\forall \delta > 0 (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \neq \emptyset, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset. \quad (3)$$

2⁰. Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}$.

1) Множество E называется *открытым*, если оно состоит из внутренних точек.

2) Множество E называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Примеры. Интервал — открытое множество, отрезок — замкнутое множество, полуинтервал не является ни открытым, ни замкнутым.

Множество $\text{Int } E$, состоящее из всех внутренних точек множества E , называется его *внутренностью*. Это наибольшее открытое подмножество множества E .

Множество $\bar{E}$, полученное из E присоединением всех граничных точек, называется его *замыканием*. Замыкание — наименьшее замкнутое

множество, содержащее данное множества. Точки замыкания $\bar{E}$ называются точками *прикосновения* множества E .

Предложение. Множество E является замкнутым в том и только в том случае, если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей.

3⁰. **Определение 3.** Пусть $K \subset \mathbb{R}$. Множество K называется *компактом*, если всякая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу K .

Теорема 1. Для того, чтобы множество $K \subset \mathbb{R}$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

2. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема 1. Непрерывный образ компакта есть компакт. Пусть f — непрерывная функция на компакте K . Тогда $f(K)$ — компакт.

► Возьмем произвольную последовательность элементов множества $f(K)$:

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in f(K).$$

Для каждого номера n найдется $x_n \in K$, для которого $y_n = f(x_n)$. Из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов компакта K извлекаем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$. Полагая $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, получаем подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая по непрерывности сходится к $y_0 = f(x_0)$, $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_0$. Таким образом, каждая последовательность обладает подпоследовательностью, сходящейся к элементу множества значений, последнее множество — компакт. ◀

Следствиями теоремы 1 являются классические

Теорема 2 (I теорема Вейерштрасса). Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f ограничена.

Теорема 3 (II теорема Вейерштрасса). Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f имеет наименьшее и наибольшее значения.

3. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ , $a, b \in \Delta$, $a < b$, в точках a, b функция f принимает значения разных знаков. Тогда f принимает нулевое значение в некоторой точке интервала (a, b) .

► Для определенности считаем, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Положим

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \neq \emptyset, \quad c = \sup E.$$

По свойству точной верхней грани

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E \quad c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Получена последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$, $f(x_n) < 0$. Предельный переход дает неравенство $f(c) \leq 0$.

Теперь видим, что $c < b$ и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in (c, b)$. Переходя к пределу (при $x \rightarrow c + 0$), получаем неравенство $f(c) \geq 0$. Окончательно, $f(c) = 0$.

Теорема доказана. ◀

Теорема 2. Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ , $a, b \in \Delta$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. Число C лежит между A, B . Тогда f принимает значение C в некоторой точке c , лежащей между a, b .

Теорема 3. Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ . Тогда $f(\Delta)$ — промежуток.

В теоремах 1–3 существенно используется непрерывность и свойства промежутка. Так, функция

$$f : f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

принимает положительные и отрицательные значения, но нигде не обращается в нуль. Причина — отсутствие непрерывности. То же самое можно сказать о функции

$$f : f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in [2, 3], \end{cases}$$

определенной на множестве, не являющемся промежутком.

4. Монотонные функции

1⁰ Теорема 1. Пусть f — монотонная функция на промежутке Δ . Для непрерывности функции f необходимо и достаточно, чтобы ее множество значений $\Delta' = f(\Delta)$ было промежутком.

2⁰ Обращение строго монотонной функции.

Пусть f строго монотонна, например, строго возрастает, и непрерывна на промежутке Δ . Множество значений $\Delta' = f(\Delta)$ — промежуток. Из строгого возрастания следует инъективность отображения f . Построим обратную функцию $g = f^{-1} : \Delta' \rightarrow \Delta$. Функция g строго возрастает.

Теорема 2. Пусть f строго монотонна и непрерывна на промежутке Δ . Тогда обратная функция $g = f^{-1}$ непрерывна на промежутке $\Delta' = f(\Delta)$.

5. Равномерная непрерывность функции

1⁰ Определение. Пусть f — функция, определенная на множестве E . f называется *равномерно непрерывной* на E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in E |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (1)$$

Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках. Пример непрерывной функции, не обладающей свойством равномерной непрерывности, мы сейчас рассмотрим.

2⁰ Примеры.

1) Функция $f: f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in (0, 1]$ поточечно непрерывна. Однако, в

точках $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ она принимает значение $f(x'_n) = 1$, а в точках

$x''_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ — значение $f(x''_n) = -1$, $f(x'_n) - f(x''_n) = 2$, хотя $x'_n - x''_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. f

не является равномерно непрерывной.

2) Функция $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ не является равномерно непрерывной, поскольку «скорость ее изменения» неограниченно растет при $x \rightarrow \infty$:

$$\forall \delta > 0 (x + \delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty,$$

Каким бы малым ни было $\delta > 0$, все равно найдется x , для которого

$$|(x + \delta)^2 - x^2| > 1.$$

3⁰ Теорема Кантора.

Теорема Пусть функция f непрерывна на компакте K (в частности, на отрезке). Тогда f равномерно непрерывна на K .

► Проведем рассуждение от противного. Допустим, функция не является равномерно непрерывной, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x'_n, x''_n \in K \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Из последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ извлечем сходящуюся подпоследовательность

$x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$. Поскольку $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, то и $x''_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$. По непрерывности

$f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$, так что $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, но

$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. ◀

**Разработал доцент кафедры высшей
математики Моисеев А. А.**