ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01 Введение в математический анализ

Тема № 05 Непрерывные функции

Лекция № 13 Степенная и показательная функции

Учебные вопросы:

1. Степенная функция с рациональным показателем
2. Показательная функция

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

Элементарные функции

Сегодня мы должны обсудить основные элементарные функции. Мы уже внесли существенные уточнения в наши представления о вещественных числах. Теперь необходимо внимательнее разобраться и в функциях.

1. Степенная функция с рациональным показателем

1^0. Степень с целым показателем.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда $a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n}$ $\left(a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n a\right)$.

Для $a \neq 0$ положим $a^0 = 1$, а $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$ при $m \in \mathbb{Z}, m < 0$.

Для степени с целым показателем справедливы следующие свойства:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$;

2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

3) $\left(ab\right)^n = a^n b^n$.

2^0. Степенная функция с натуральным показателем.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\left(x\right) = x^n. \tag{1}$$

Функция непрерывна по теореме о непрерывности произведения. f строго возрастает на $\left[0, +\infty\right)$.

По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции множество значений функции f — промежуток, а поскольку $f\left(0\right) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) + \infty$,то $f\left(\left[0, +\infty\right)\right) = \left[0, +\infty\right)$.

Дополнение. При четном n функция f четна, она убывает на $(-\infty, 0]$, $f((-\infty, 0]) = [0, +\infty)$. При нечетном n функция f нечетна, она возрастает на $(-\infty, +\infty)$, $f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

3^0. Степенная функция с целым показателем.

Если $m < 0,\ m \in \mathbb{Z}$, то функция

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^m = \frac{1}{x^n},\ \text{где } n = -m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

непрерывна во всех точках $x \neq 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$.

4^0. Корень n-й степени.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда функция

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ f(x) = x^n, \tag{3}$$

является биекцией. Обратная функция

$$g = f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \tag{4}$$

называется корнем n-й степени. Для значений этой функции используются обозначения

$$g(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}. \tag{5}$$

По теореме об обращении строго монотонной функции корень непрерывен и строго возрастает на $[0, +\infty)$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\forall x \geq 0\ \sqrt[n]{x^n} = x, \\ &\forall y \geq 0\ \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y. \end{aligned} \tag{6}$$

5^0. Степенная функция с рациональным показателем.

Пусть $r \in \mathbb{Q}, r > 0, r = \frac{m}{n}$. Степень числа $x > 0$ с рациональным показателем r определим формулой

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \tag{7}$$

Проверим корректность определения:

$$\text{если } r = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}, \text{ то } u = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \overset{?}{=} \left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{m_1} = v.$$

Действительно,

$$mn_1 = m_1 n,$$

$$u^{nn_1} = \left(u^n\right)^{n_1} = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^{mn}\right)^{n_1} = \left(\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)^m\right)^{n_1} = x^{mn_1},$$

$$v^{nn_1} = \left(v^{n_1}\right)^n = \left(\left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{m_1 n_1}\right)^n = \left(\left(\left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{n_1}\right)^{m_1}\right)^n = x^{m_1 n},$$

$$u^{nn_1} = v^{nn_1}, u = v.$$

Функция

$$f : f(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}} = x^r \tag{8}$$

непрерывна (по теореме о непрерывности композиции) и строго возрастает на $[0, +\infty)$.

Если $r < 0$, функция

$$f(x) = \frac{1}{x^{-r}} = x^r \tag{9}$$

непрерывна и строго убывает на $(0, +\infty)$.

Предложение. *Для $a, b > 0$ и рациональных p, q имеем*

1) $a^p a^q = a^{p+q}$;

2) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$;

3) $\left(ab\right)^p = a^p b^p$.

▶Проверим, например, 2).

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{m_1}{n_1}$; $u = \left(a^p\right)^q$, $v = a^{pq}$. Тогда

$$u^{nn_1} = \left(\left(a^p\right)^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{nn_1} = \left(\sqrt[n_1]{a^p}\right)^{m_1 nn_1} = \left(a^p\right)^{m_1 n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mm_1 n} = a^{mm_1},$$

$$v^{nn_1} = a^{mm_1},$$

так что $u = v$.◀

2. Показательная функция

1^0. Пусть $a > 1$.

К настоящему моменту мы определили степень с рациональным показателем. При этом

$$\begin{aligned} & r > 0 \Rightarrow \; a^r > 1 \\ & r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2} \end{aligned} \qquad (1)$$

На множестве рациональных чисел можно определить функцию

$$f : f\left(r\right) = a^r. \qquad (2)$$

Функция строго возрастает. Можно установить непрерывность функции.

Сейчас мы ограничимся доказательством соотношения $a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Если в биноме Ньютона $\left(1+x\right)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k$ в правой части оставить только слагаемой с $k = 1$, мы получим для положительных x неравенство $\left(1+x\right)^n \ge nx$. Поэтому

$$a=\left(1+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)^n \geq n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right);\ 0<a^{\frac{1}{n}}-1\leq \frac{a}{n}\underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

2^0. Определение показательной функции.

Пусть $x\in\mathbb{R}$. Для любых $p,q\in\mathbb{Q}$, для которых $p<x<q$ справедливо неравенство $a^p<a^q$. По аксиоме полноты

$$\exists y\in\mathbb{R}\ \forall p,q\ p<x<q \Rightarrow a^p\leq y\leq a^q$$

Такое число единственно. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists p,q\ \ p<x<q\ a^q-a^p<\varepsilon$$

Подберем $r_0>x$, положим $A=a^{r_0}$. Найдется натуральное n_0, для которого $a^{\frac{1}{n_0}}-1<\frac{\varepsilon}{A}$. Подберем $p<x<q$ так, чтобы $q-p<\frac{1}{n_0}$, получим неравенство

$$a^q-a^p=a^p\left(a^{q-p}-1\right)<a^{r_0}\left(a^{\frac{1}{n_0}}-1\right)<A\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon.$$

Теперь примем найденное число y за значение показательной функции в точке x:

$$f(x)=y=a^x.$$

Заметим, что для $x\in\mathbb{Q}$ новое определение совпадает со старым.

Из проведенного построения сразу получаются соотношения

$$a^x=\sup_{p<x,\ p\in\mathbb{Q}} a^p,\ a^x=\inf_{q>x,\ q\in\mathbb{Q}} a^q,\ a^x=\lim_{r\to x,\ r\in\mathbb{Q}} a^r. \qquad (3)$$

3^0. Основные свойства показательной функции.

1) Строгое возрастание.

▶Пусть $x_1<x_2$. Подберем $q,p\in\mathbb{Q}$, для которых $x_1<q<p<x_2$. Тогда $a^{x_1}\leq a^q<a^p\leq a^{x_2}$.◀

2) Непрерывность.

▶Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Подберем $q, p \in \mathbb{Q}$, $p < x_0 < q, a^q - a^p < \varepsilon$. Если

$$x \in (p, q), \text{ то } \left|a^x - a^{x_0}\right| < \varepsilon .◀$$

3) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

▶Пусть $p_n \underset{n\to\infty}{\to} x_1, q_n \underset{n\to\infty}{\to} x_2, p_n, q_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $a^{p_n} a^{q_n} = a^{p_n + q_n}$. Предельный переход дает требуемое равенство. ◀

4^0. Если $0 < a < 1$, положим $b = \frac{1}{a} > 1$ и определим показательную функцию соотношением

$$f(x) = a^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}. \tag{4}$$

В этом случае показательная функция оказывается строго убывающей.

Основную роль в анализе имеет показательная функция с основанием e, экспоненциальная функция:

$$f(x) = e^x. \tag{5}$$

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.