ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 05 Непрерывные функции

Лекция № 14. Логарифмическая и тригонометрические функции

Учебные вопросы:

1. Логарифмическая функция
2. Степенная функция с произвольным вещественным показателем
3. Тригонометрические функции
4. Замечательные пределы

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Логарифмическая функция

Экспоненциальная функция $f(x) = e^x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$. Множество ее значений есть промежуток. Поскольку

$$e^x \underset{x\to-\infty}{\to} 0,\ e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,$$

то множеством значений является множество $(0, +\infty)$ положительных чисел.

Определение. Функция $g = f^{-1}$, обратная к экспоненциальной, называется логарифмической,

$$g : g(y) = \ln y,\ y \in (0, +\infty). \tag{1}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} &g(f(x)) = x,\ \ln e^x = x,\ x \in (-\infty, +\infty), \\ &f(g(y)) = y,\ e^{\ln y} = y,\ y \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Логарифмическая функция непрерывна и строго возрастает на $(0, +\infty)$, множество значений — $\mathbb{R}$.

Обратная функция к показательной с основанием a называется *логарифмической функцией по основанию* a.

2. Степенная функция с произвольным вещественным показателем

Степенную функцию с показателем $\mu \in \mathbb{R}$ определим формулой

$$f : f(x) = x^\mu = e^{\mu \ln x},\ x \in (0, +\infty). \tag{1}$$

Функция f непрерывна, возрастает, если $\mu > 0$, убывает, если $\mu < 0$, множество значений — $(0, +\infty)$

Если $\mu > 0$, степенную функцию доопределяют в нуле соотношением $f(0) = 0$.

3. Тригонометрические функции

1^0. При рассмотрении тригонометрических функций будем опираться на геометрическое определение синуса и косинуса, согласно которому $(\cos x, \sin x)$ —это координаты точки B, в которую переходит точка $A(1, 0)$ при повороте плоскости на угол x вокруг начала координат. Точки A и B лежат на единичной окружности.

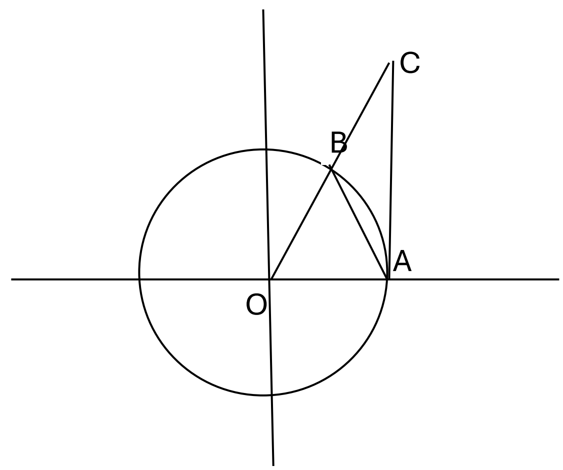

Рис. 1

2^0. Предложение 1.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

▶Из рисунка видно, что площади S_1, S_2, S_3 треугольника OAB, сектора OAB и треугольника OCB связаны неравенствами

$$S_1 < S_2 < S_3.$$

Поскольку

$$S_1 = \frac{1}{2}\sin x,\ S_2 = \frac{1}{2}x,\ S_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Делением на $\sin x > 0$ получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и, наконец,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \blacktriangleright$$

3^0. Предложение 2.

$$\forall x \quad |\sin x| \le |x|. \tag{2}$$

$\blacktriangleright$ Для $x = 0$ неравенство очевидно, для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ неравенство непосредственно следует из (1), для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ обеспечивается четностью функций в нашем неравенстве. Если же $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, неравенство становится очевидным, поскольку $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$. $\blacktriangleleft$

3^0. Непрерывность.

Непрерывность синуса следует из оценки

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Поскольку

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

то непрерывность косинуса следует из теоремы о непрерывности композиции.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, тангенс непрерывен во всех точках, где косинус отличен от нуля, т.е. во всех точках своей области определения.

4. Замечательные пределы

I замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

▶В предыдущем параграфе получено неравенство

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Поскольку $\cos x \underset{x\to 0}{\to} \cos 0=1$, то по теореме о сжатой функции

$$\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1.◀$$

Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

Действительно,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1\cdot 1=1,$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\underset{x\to 0}{\sim}2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

$$\operatorname{tg} x-\sin x=\operatorname{tg} x(1-\cos x)\underset{x\to 0}{\sim}x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{2}$$

II замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{2}$$

▶По определению

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e. \tag{3}$$

1) Покажем, что

$$(1+x)^{1/x} \underset{x\to+0}{\to} e \tag{4}$$

Для $x\in(0,1)$ подберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$n\le\frac{1}{x}<n+1,\ \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}. \tag{5}$$

Теперь

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<(1+x)^{1/x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n, \tag{6}$$

где $a_n \underset{n\to\infty}{\to} e,\ b_n \underset{n\to\infty}{\to} e$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Подберем номер N так, чтобы

$$\forall n>N\ \ a_n>e-\varepsilon,\ b_n<e+\varepsilon. \tag{7}$$

Положим $\delta=\dfrac{1}{N+1}$. Пусть $x\in(0,\delta)$, подберем номер n так, чтобы выполнялись неравенства (5). Тогда справедливы неравенства (6) и

$$n+1>\frac{1}{\delta}=N+1,\ n>N,$$

поэтому выполняются неравенства (7). Из (6), (7) получаем

$$e-\varepsilon<(1+x)^{1/x}<e+\varepsilon.$$

Соотношение (4) доказано.

2) Покажем, что

$$(1+x)^{1/x} \underset{x\to -0}{\to} e. \qquad (8)$$

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in (-1, 0)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$,

положим $y_n = -x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n > 0$. Тогда

$$(1+x_n)^{1/x_n} = (1-y_n)^{-1/y_n} = \left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n} = \left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{1/y_n}.$$

Положим $z_n = \dfrac{y_n}{1-y_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $z_n > 0$. Заметим, что $\dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1-y_n}{y_n} = \dfrac{1}{y_n} - 1$, поэтому

можем написать

$$(1+x_n)^{1/x_n} = (1+z_n)^{1/z_n + 1} = (1+z_n)^{1/z_n}(1+z_n) \underset{n\to\infty}{\to} e\cdot 1 = e.$$

Формула (8) доказана. ◀

Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$.

▶1) Поскольку $(1+x)^{1/x} \underset{x\to 0}{\to} e$, то с учетом непрерывности логарифма

приходим к выводу

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{1/x} \underset{x\to 0}{\to} \ln e = 1.$$

2) В доказанном соотношении выполним замену переменной, полагая $x = e^t - 1$:

$$\frac{\ln\left(1+\left(e^t-1\right)\right)}{e^t-1}\underset{t\to 0}{\to}1,\ \frac{t}{e^t-1}\underset{t\to 0}{\to}1,\ \frac{e^t-1}{t}\underset{t\to 0}{\to}1.$$

3)

$$\left(1+x\right)^{\mu}-1=e^{\mu\ln(1+x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}\mu\ln\left(1+x\right)\underset{x\to 0}{\sim}\mu x.\blacktriangleleft$$

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.