

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального
исчисления

Лекция № 01. Производная и дифференцируемость

Учебные вопросы:

1. Понятие производной
2. Понятие дифференциала
3. Взаимосвязь дифференциала и производной
4. Односторонние производные
5. Касательная, её уравнение
6. Геометрический смысл производной и дифференциала

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Производная и дифференцируемость

Определение 1. Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

Если взять за $\Delta x = x - x_0$, то определение переписывается как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

$\Delta x = x - x_0$ является приращением аргумента, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции $y = f(x)$. Таким образом, производная $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

Помимо упомянутого уже обозначения производной $f'(x_0)$, используется также и обозначения $f'_x(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, если требуется подчеркнуть, по какой именно переменной берется производная. Если функция $y = f(x)$ устанавливает зависимость между переменными x и y , то производную $f(x)$ также обозначают $y'(x)$, $y'_x(x)$, $\frac{dy}{dx}(x)$.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = x_0$.

Решение. По определению

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0 \cdot (x - x_0)} = \\ &= -\frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ точке $x = x_0$.

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x \cdot \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos x_0 \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cdot \cos x_0 \cdot (x - x_0)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся эквивалентностью $\sin t \sim t$ при $t \rightarrow 0$ и непрерывностью $\cos x$.

Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{\cos x \cdot \cos x_0 \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cdot \cos x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Если существует вещественное число A такое, что

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (3)$$

то функцию $f(x)$ называют дифференцируемой в точке x_0 , а $A \cdot \Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 .

Дифференциал в точке x_0 обозначают $df(x_0)$ или, в случае $y = f(x)$, просто dy , если из контекста ясно о какой точке идет речь. Таким образом, дифференциал $df(x_0) = A \cdot \Delta x$. Дифференциал является линейной функцией от приращения Δx .

Поскольку $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, то дифференциал можно охарактеризовать как линейную часть приращения функции $f(x)$.

Пример 3. Доказать по определению дифференцируемость функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Найдем приращение функции при $x_0 = 1$

$$f(1 + \Delta x) - f(1) = \sqrt{1 + \Delta x} - 1 = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1}.$$

Знаменатель правой части стремится к двум. Можно предположить, что линейная часть приращения равна $\frac{\Delta x}{2}$. Тогда при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(1 + \Delta x) - f(1) - \frac{\Delta x}{2} &= \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1} - \frac{\Delta x}{2} = \\ &= \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + \Delta x}}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1} = o(\Delta x), \end{aligned}$$

поскольку $\frac{1 - \sqrt{1 + \Delta x}}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1}$ бесконечно мала при $\Delta x \rightarrow 0$. Из определения следует, что функция дифференцируема при $x = 1$, $A = \frac{1}{2}$, а дифференциал равен $\frac{\Delta x}{2}$.

Теорема 1 (Критерий дифференцируемости). *Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Тогда*

$f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ существует (конечная) производная $f'(x_0)$.

В случае дифференцируемости $f'(x_0) = A$, где A — постоянная из определения дифференцируемости.

► Сначала докажем достаточность. То есть если функция дифференцируема в точке x_0 , то у функции существует производная в этой точке. Из условия теоремы

следует, что при некотором вещественном A

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A. \end{aligned}$$

Обратно. По условию существует конечный предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) &= 0, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Последнее означает, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x = o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

а значит, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и константа A из определения дифференцируемости равна $f'(x_0)$. ◀

Следствие 1. $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$, где dx — дифференциал независимой переменной x .

► Рассмотрим тождественное отображение вещественной прямой, то есть функ-

цию $p(x) = x$ при любом вещественном x . Тогда в точке x_0

$$p(x_0 + \Delta x) - p(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x = \Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ тождественно равен нулю. По определению дифференцируемости дифференциал в точке x_0 функции $p(x)$, обозначаемый в дальнейшем dx , равен Δx (линейная часть приращения). Этот дифференциал будем называть дифференциалом независимой переменной x . Заметим также, что $dx = \Delta x$ не зависит от точки x_0 . Учитывая, что по теореме $A = f'(x_0)$, получаем

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx.$$



Заметим, что в других обозначениях формулу можно записать как

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

где дифференциал dy и производная y'_x вычисляются в одной точке.

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют дифференцируемой на интервале, если $f(x)$ дифференцируема в любой точке этого интервала.

Замечание 1. Если в определении производной предел бесконечен, то говорят, что производная $f'(x)$ в точке x_0 бесконечна. В дальнейшем, если не оговорено противное, производные конечны.

Пример 4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$. Тогда $f'(0) = +\infty$.

Решение. В самом деле,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

2. Односторонние производные

Теперь перейдем к рассмотрению понятия односторонних производных. Фактически надо в определении производной взять односторонний предел.

Определение 1. *Функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Тогда предел*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1)$$

в случае его существования и конечности, называют производной функции $f(x)$ справа в точке x_0 .

Функция $f(x)$ определена на промежутке $(x_0 - \delta; x_0]$, $\delta > 0$. Тогда предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (2)$$

в случае его существования и конечности, называют производной функции $f(x)$ слева в точке x_0 .

Теорема 1. *Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Тогда $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ существуют (конечные) односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, равные между собой: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

В случае дифференцируемости $f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$.

► Доказательство немедленно следует из определения производных и теоремы о связи предела функции и односторонних пределов. ◀

Следующий пример показывает, что не у всякой функции существует производная.

Пример 1. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Решение. Рассматривая в следующей строке либо верхние знаки, либо нижние, получаем

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\pm x}{x} = \pm 1.$$

Поскольку $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$, то последняя теорема гарантирует, что функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке 0.

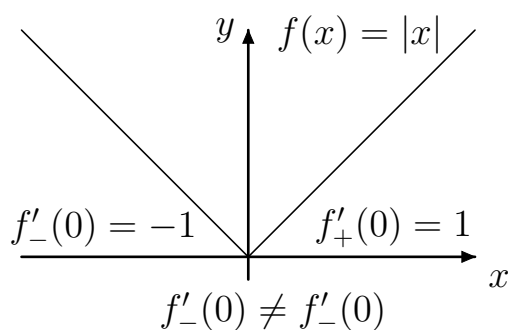


Рис. 1.

3. Геометрический смысл производной, касательная прямая

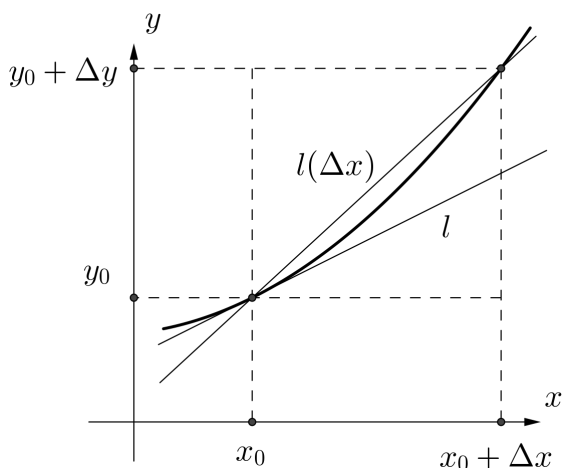


Рис. 1.

Функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Пусть $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим приращение аргумента Δx и функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рисунке (Рис. 1) изображен случай $\Delta x > 0$. Пусть $l(\Delta x)$ — секущая, соединяющая точки $(x_0; y_0)$ и $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, $k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — угловой коэффициент секущей. Её уравнение

$$y = k(\Delta x) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Если существует предел $k_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x)$, то прямую l , проходящую через точку $(x_0; y_0)$, с угловым коэффициентом k_0 называют касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$. Её уравнение $y = k_0 \cdot (x - x_0) + y_0$. С учётом того, что $y_0 = f(x_0)$, а $k_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, получаем уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (1)$$

Таким образом, касательную в точке $(x_0; f(x_0))$ можно охарактеризовать как предельное положение секущей, проходящей через точку $(x_0; f(x_0))$ при условии что длина хорды такой секущей стремится к нулю.

Замечание 1. Для бесконечной производной касательная — вертикальная прямая $x = x_0$, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Рассмотрим вопрос о геометрическом смысле производной и дифференциала.

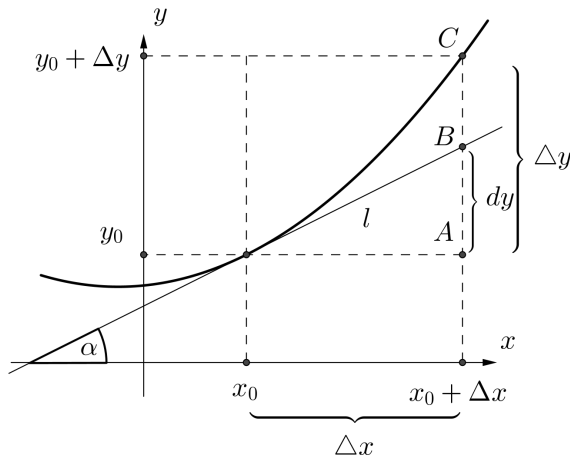


Рис. 2.

Пусть α — угол между осью Ox и касательной l , отсчитываемый против хода часовой стрелки от оси Ox к касательной l (Рис. 2). Тогда $\operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной, то есть $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Значит, производная — тангенс угла наклона (угловой коэффициент) касательной. В этом и заключается геометрический смысл производной.

Длина отрезка AB (как функция приращения Δx), взятая со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен оси Oy , и со знаком минус в противном случае, равен дифференциалу $dy = df(x_0)$, поскольку $dy = f'(x_0) dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$.

Пример 1. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ при $x = \frac{1}{2}$.

Решение. $f(x) = \frac{1}{x}$, точка $x_0 = \frac{1}{2}$, $f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = 2$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Подставляем в уравнение касательной

$$y = -4 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) + 2,$$

$$y = -4x + 4.$$

Замечание 2 (Физический смысл производной). Если $s = s(t)$ — перемещение точки по прямой в зависимости от времени t , то средняя скорость $v_{\text{ср}}$ вычисляется как отношение пройденного расстояния к затраченному времени. То есть $v_{\text{ср}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Устремляя Δt к нулю, находим мгновенную скорость v в точке t .

Следовательно, $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$. Откуда получаем физический смысл производной $s'(t)$ — мгновенная скорость точки в момент времени t , если перемещение $s = s(t)$. В случае произвольной функции, можно сказать, что производная — скорость изменения функции.

**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**