

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального
исчисления

Лекция № 02. Свойства производной и дифферен-
циала

Учебные вопросы:

1. Свойства производной, связанные с арифметическими действиями
2. Производная сложной и обратной функций
3. Свойства дифференциала, связанные с арифметическими действиями над функциями
4. Свойство инвариантности первого дифференциала

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Криков А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Криков, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).- Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Свойства дифференцируемых функций

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

► По определению дифференцируемой функции в точке x_0

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

при некотором вещественном A . Тогда, используя замену $x = x_0 + \Delta x$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0) + A \Delta x + o(\Delta x)) = \\ &= f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \Delta x + o(\Delta x)) = f(x_0). \end{aligned}$$

То есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 . ◀

Теорема 2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда в этой точке

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c \in \mathbb{R}$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, если $g(x) \neq 0$

► Критерий дифференцируемости гарантирует, что эти свойства можно доказывать по определению производной или по определению дифференцируемости. Ниже будет использован и тот и другой подходы.

1. Пусть $h(x) = c \cdot f(x)$. Докажем дифференцируемость этой функции в точке x_0 по определению производной и найдем эту производную.

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует дифференцируемость функции $h(x)$ в точке x_0 и, с учетом $h(x) = c \cdot f(x)$, равенство

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{при } x = x_0.$$

2. Пусть $h(x) = f(x) + g(x)$. Докажем дифференцируемость в точке x_0 по определению дифференцируемой функции и найдем ее производную. По определению дифференцируемой функции в точке x_0 и критерию дифференцируемости при $\Delta x \rightarrow 0$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Складывая, получаем

$$f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + g(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0)) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

$$h(x_0 + \Delta x) = h(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{где } A = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Из определения дифференцируемости следует, что функция $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а ее производная $h'(x_0) = A = f'(x_0) + g'(x_0)$, что равносильно доказываемому равенству.

3. Пусть $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Докажем дифференцируемость в точке x_0 по определению дифференцируемой функции и найдем ее производную. По определению дифференцируемой функции в точке x_0 и критерию дифференцируемости при $\Delta x \rightarrow 0$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Учитывая, что $\Delta x \cdot o(\Delta x) = o(\Delta x)$, $const \cdot o(\Delta x) = o(\Delta x)$ и $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, после перемножения получаем

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) &= \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + (f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)) \cdot \Delta x + o(\Delta x). \end{aligned}$$

$$h(x_0 + \Delta x) = h(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$$\text{где } A = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0).$$

По определению дифференцируемости функция $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а ее производная $h'(x_0) = A = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$, что равносильно доказываемому равенству.

4. Пусть $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. Докажем дифференцируемость этой функции в точке x_0 по определению производной и найдем эту производную.

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x_0) \cdot g(x) \cdot (x - x_0)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x_0) \cdot g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Ненулевые значения $g(x)$ в некоторой проколотовой окрестности x_0 обеспечивает

непрерывность функции $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ и теорема стабилизации знака функции. Вычисляя последний предел, получаем дифференцируемость функции $h(x)$ в точке x_0 и $h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Тогда в точке x_0 получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= (f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{(g(x))^2}, \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$



Замечание 1. Эти свойства верны и для односторонних производных.

Теорема 3. *Функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , функция $f(y)$ дифференцируема в точке y_0 и $g(x_0) = y_0$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0). \quad (1)$$

► Пусть $z = f(y)$, $y = g(x)$, $h(x) = f(g(x))$. Тогда по определению дифференцируемости

$$\Delta z = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot \Delta y + o(\Delta y), \quad \text{при } \Delta y \rightarrow 0,$$

$$\Delta y = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x_0) \neq 0$, то по теореме о стабилизации знака функции, в неко-

торой проколотой окрестности x_0 приращение $\Delta y \neq 0$. Следовательно,

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и теорему о пределе сложной функции, получаем

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Если же $g'(x_0) = 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$. Значит, $\Delta z = f'(y_0) \cdot o(\Delta x) + o(o(\Delta x)) = o(\Delta x)$.

А тогда $h'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = 0 = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$.

Объединяя оба случая, получаем $h'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$, что равносильно доказываемой формуле. ◀

Замечание 2. Формула для производной сложной функции может быть записана как

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (2)$$

Теорема 4. *Функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 , дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) = y_0$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

► В силу строгой монотонности функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. С учетом непрерывно-

сти обратной функции, имеем $x = f^{-1}(y) \rightarrow x_0$ при $y \rightarrow y_0$.

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Возможность замены $y = f(x)$ обеспечивает теорема о пределе сложной функции, а ненулевой знаменатель перед последним равенством — условие $f'(x_0) \neq 0$ и теорема о стабилизации знака функции. ◀

Замечание 3. Формула может быть записана как

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (3)$$

2. Свойства дифференциала

Ранее дифференциал $df(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 определялся из равенства

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (1)$$

при условии, что такое число A существует. А именно, $A \cdot \Delta x$ — дифференциал $f(x)$ в точке x_0 .

Было также показано, что $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$, где dx — дифференциал независимой переменной x .

Теорема 1. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда в этой точке*

1. $d(c \cdot f) = c \cdot df$, где $c \in \mathbb{R}$,
2. $d(f + g) = df + dg$,
3. $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$,
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$, если $g(x_0) \neq 0$.

► Используя формулу $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ и соответствующее свойство производной, получаем

1. $h(x) = c \cdot f(x)$, $h'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$. Тогда

$$dh(x_0) = h'(x_0) dx = c \cdot f'(x_0) dx = c \cdot (f'(x_0) dx) = c \cdot df(x_0),$$

а это и значит, что $d(c \cdot f) = c \cdot df$ в точке x_0 .

2. $h(x) = f(x) + g(x)$, $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} dh(x_0) &= h'(x_0) dx = (f'(x_0) + g'(x_0)) \cdot dx = f'(x_0) \cdot dx + g'(x_0) \cdot dx = \\ &= df(x_0) + dg(x_0), \end{aligned}$$

следовательно, $d(f + g) = df + dg$ в точке x_0 .

3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} dh(x_0) &= h'(x_0) dx = (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot dx = \\ &= (f'(x_0) dx) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot (g'(x_0) dx) = df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0), \end{aligned}$$

а это и означает, что $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$ в точке x_0 .

4. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} dh(x_0) &= h'(x_0) dx = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \cdot dx = \\ &= \frac{(f'(x_0)dx) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot (g'(x_0)dx)}{(g(x_0))^2} = \frac{df(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot dg(x_0)}{(g(x_0))^2}, \end{aligned}$$

то есть $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ в точке x_0 . ◀

Теорема 2 (Свойство инвариантности первого дифференциала). *Функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке y_0 , функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , $g(x_0) = y_0$ и $z = f(g(x))$ — сложная функция, dz — её дифференциал. Тогда*

$$dz = f'(y_0) \cdot dy, \quad (2)$$

где дифференциалы dz и dy вычислены в точке x_0 , а производная $f'(y)$ в точке y_0 .

► Обозначим за $h(x) = f(g(x))$. По теореме о производной сложной функции $h'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$. Кроме того, в точке x_0 $dy = g'(x_0) \cdot dx$. Следовательно,

$$dz = h'(x_0) \cdot dx = f'(y_0) \cdot g'(x_0) \cdot dx = f'(y_0) \cdot dy.$$

Что и требовалось. ◀

Замечание 1. Если сравнить формулу для дифференциала $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ и формулу из свойства инвариантности $dz = f'(y_0) \cdot dy$, то с точностью до переобозначений переменных это одна и та же формула. Но в первой формуле x — независимая переменная, а во второй формуле y — функция (зависимая переменная).

ная). Таким образом, в формуле

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx \quad (3)$$

переменная x может быть как независимой, так и зависимой (функцией). В этом и состоит суть свойства инвариантности первого дифференциала.

**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**