ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального исчисления

Лекция № 03. Табличные производные. Производные высших порядков

Учебные вопросы:

1. Табличные производные
2. Понятие производных старших порядков
3. Таблица производных старших порядков
4. Формула Лейбница

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Табличные производные

Утверждение 1.

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

▶ 1. $f(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$. Тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$.

2. $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\alpha = 0$, то получаем пункт (1). Считаем, что $\alpha \neq 0$ и используем эквивалентность $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, при $x \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$$
$$= x^\alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

3. $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Используя эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

4. Получается из (3) и формулы перехода к новому основанию $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

5. $f(x) = e^x$. Используя эквивалентность $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

6. Получается из (5), частного случая основного логарифмического тождества $e^{\ln a} = a$ и производной сложной функции.

7. $f(x) = \sin x$. Используя эквивалентность $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, тригонометрическую формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ и непрерывность косинуса, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

8. Доказывается аналогично пункту (7), но используем формулу $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

9. По формуле производный частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Аналогично пункту (9).

11. $f(y) = \sin y$, её обратная (для $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) $f^{-1}(x) = \arcsin x$. По формуле для производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Знак плюс перед корнем обеспечивается тем, что арксинус принимает значения в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором косинус принимает положительные значения.

12. Аналогично пункту (11).

13. $f(y) = \operatorname{tg} y$, её обратная (для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Используя формулу для производной обратной функции и $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \\ = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

14. Аналогично пункту (13).

15. Так как $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

16. Аналогично пункту (15).

17. По формуле производной частного и основному гиперболическому тож-

дству $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\ (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

18. Аналогично пункту (17). ◀

Пример 1. Найти производную функции $y = u^v$ на интервале $(a; b)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на этом интервале и $u(x) > 0$ при $x \in (a; b)$.

Решение. Логарифмируя равенство $y = u^v$, получаем $\ln y = v \cdot \ln u$. Используя формулу для производной произведения и производной сложной функции, при дифференцировании последнего равенства получаем

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$
$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right).$$

И в итоге

$$y' = u^{v-1} \cdot (u\, v'\ \ln u + v\, u').$$

2. Производные высших порядков

Определение 1. *Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Обозначим (производная нулевого порядка)*

$$f^{(0)}(x) = f(x). \tag{1}$$

Тогда, если в некоторой окрестности точки x_0 существует производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$, то её производная в точке x_0 называется производной функции $f(x)$ порядка n в точке x_0 и обозначается $f^{(n)}(x_0)$. Таким образом,

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0). \tag{2}$$

Замечание 1. Обозначения n-ой производной в точке x: $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$. Если $y = f(x)$, то $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ или $y^{(n)}_{x^n}$ (чтобы подчеркнуть по какой переменной берется производная).

Производные первого, второго, третьего порядков также обозначаются штрихами: y', y'', y''' соответственно. Производные следующих порядков — с использованием римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII}, y^{IX}, y^{X} и т.д.

Пример 1. Если $y = x \cdot e^{-x}$, то $y^{(n)} = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot e^{-x}$.

Решение. В самом деле, при $n = 0$ (база индукции) утверждение верно. Предполагаем, что утверждение верно при $n = k$ (индукционное предположение)

$$y^{(k)} = (-1)^k \cdot (x-k) \cdot e^{-x}.$$

На основании этого предположения покажем, что утверждение верно и при $n = k+1$ (индукционный переход).

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = (-1)^k \left(e^{-x} + (x-k) \cdot e^{-x} \cdot (-1)\right) =$$
$$= (-1)^k e^{-x} (1 - x + k) = (-1)^{k+1} \cdot (x - (k+1)) \cdot e^{-x}.$$

Индукционный переход завершен и формула доказана для всех натуральных n.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется n раз дифференцируемой в точке x_0,*

если в этой точке у функции $f(x)$ существует производная n-го порядка. Функция $f(x)$ называется n раз дифференцируемой на интервале $(a;b)$, если $f(x)$ n раз дифференцируема в любой точке этого интервала.

Утверждение 1. *Для $n \in \mathbb{N}$ и x из области определения соответствующей функции*

1. $(e^x)^{(n)} = e^x$,
2. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$,
3. $(\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$,
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$,
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

▶ *Докажем формулу (4). Действуем по индукции. При $n=1$*

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

база проверена. Если для $n=k$ верно равенство (индукционное предположение)

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),$$

то для $n=k+1$

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left((\sin x)'\right)^{(k)} = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{(k)} =$$
$$= \sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Индукционный переход завершен, и формула пункта (4) доказана для любого натурального n. Остальные пункты утверждения доказываются подобным образом. ◀

Утверждение 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x_0*

1. $(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$, *где* $a \in \mathbb{R}$.
2. $(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))^{(n)} = \alpha \cdot f^{(n)}(x) + \beta \cdot g^{(n)}(x)$.
3. $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j \cdot f^{(n-j)}(x) \cdot g^{(j)}(x)$.

Замечание 2. Свойство (3) называют формулой Лейбница.

Все доказательства однотипны и используют метод математической индукции. Докажем только пункт (3).

▶ При $n = 0$ (база) левая часть равна

$$(fg)^{(0)}(x) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

а правая

$$\sum_{j=0}^{0} C_0^j \cdot f^{(0-j)}(x)g^{(0)}(x) = C_0^0 \cdot f^{(0)}(x)g^{(0)}(x) = f(x)g(x).$$

Откуда следует истинность утверждения при $n = 0$.

Предполагаем, что утверждение верно при $n = k$ (индукционное предполо-

жение)

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot f^{(k-j)}(x) g^{(j)}(x).$$

Покажем, что утверждение верно и при $n = k + 1$ (индукционный переход).

$$(fg)^{(k+1)}(x) = \left((fg)^{(k)}(x)\right)' = \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k-j)}(x) g^{(j)}(x)\right)'.$$

Продифференцировав каждое слагаемое как произведение и разбив затем на две суммы, получаем

$$(fg)^{(k+1)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k+1-j)}(x) g^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k-j)}(x) g^{(j+1)}(x).$$

Во второй сумме заменим индекс $j = i - 1$

$$(fg)^{(k+1)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j f^{(k+1-j)}(x) g^{(j)}(x) + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} f^{(k+1-i)}(x) g^{(i)}(x).$$

Переобозначим во второй сумме i за j, запишем отдельно слагаемые, соответствующие $j = 0$ и $j = k + 1$, сгруппируем в одну сумму остальные:

$$(fg)^{(k+1)}(x) = C_k^0 f^{(k+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{k} \left(C_k^j + C_k^{j-1}\right) f^{(k+1-j)}(x) g^{(j)}(x) + \\ + C_k^k f^{(0)}(x) g^{(k+1)}(x).$$

Учитывая, что $C_{k+1}^{j} = C_k^j + C_k^{j-1}$, $C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0$, $C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$, получаем

$$(fg)^{(k+1)}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^{j} f^{(k+1-j)}(x) g^{(j)}(x).$$

Индукционный переход завершён и формула Лейбница доказана для всех натуральных n. ◀

Решим пример (1), используя формулу Лейбница.

Пусть $f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = x$. Тогда $y = xe^{-x} = f(x) \cdot g(x)$, следовательно,

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \cdot f^{(n-j)}(x) \cdot g^{(j)}(x).$$

Учтём, что $g^{(0)}(x) = g(x) = x, g^{(1)}(x) = g'(x) = 1, g^{(2)}(x) = g''(x) = 0, g^{(j)}(x) = 0$ при $j \geqslant 2$, а $f^{(m)}(x) = (-1)^m e^{-x}$. Отсюда следует, что в этой сумме остается только два ненулевых слагаемых, соответствующих $j = 0$ и $= 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y^{(n)} =& C_n^0 \cdot x \cdot (-1)^n e^{-x} + C_n^1 \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1} e^{-x} = \\ =& x \cdot (-1)^n e^{-x} + n \cdot (-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^n e^{-x} (x - n). \end{aligned}$$

Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.