ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 02. Важнейшие теоремы о дифференцируемых функциях

Лекция № 04. Дифференциалы высших порядков. Теоремы о производной

Учебные вопросы:

1. Понятие дифференциалов старших порядков, их свойства
2. Отсутствие свойства инвариантности для дифференциалов порядка выше первого
3. Теорема Ферма
4. Теорема Ролля
5. Теорема Лагранжа
6. Теорема Коши

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Дифференциалы высших порядков

Перейдем к понятию дифференциала порядка n.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка. Тогда для $n > 1$ определим*

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right). \tag{1}$$

Утверждение 1. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка. Тогда*

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \tag{2}$$

Замечание 1. $dx^n = (dx)^n$.

▶ Доказательства по индукции. При $n = 1$ (база индукции) утверждение $dy = f'(x)dx$ верно. Пусть для $n = k$ верно равенство (индукционное предположение)

$$d^k y = f^{(k)}(x) dx^k,$$

тогда для $n = k + 1$

$$d^{k+1} y = d\left(d^k y\right) = d\Big(f^{(k)}(x) dx^k\Big).$$

Воспользуемся формулой дифференциала произведения и формулой $d\left(dx^k\right) = k \cdot (dx)^{k-1} \cdot d(dx)$, вытекающей из свойства инвариантности первого дифференциала.

$$
\begin{aligned}
d^{k+1}y =& d\big(f^{(k)}(x)\big) \cdot dx^k + f^{(k)}(x) \cdot d\left(dx^k\right) = \\
=& \left(f^{(k)}(x)\right)' \cdot dx \cdot dx^k + f^{(k)}(x) \cdot k \cdot (dx)^{k-1} \cdot d(dx).
\end{aligned}
$$

Поскольку дифференциал независимой переменной не зависит от точки в которой берется, то по отношению к дифференцированию его можно считать константой, следовательно, $d^2x = d(dx) = 0$. А тогда

$$d^{k+1}y = f^{(k+1)}(x) \cdot dx^{k+1}.$$

Индукционные переход завершен и исходное утверждение доказано для всех натуральных n. ◀

Следствие 1.

$$d^n x = 0 \quad \textit{при}\ n > 1. \tag{3}$$

Следствие 2. *Пусть функция $u(x)$ и $v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда в точке x_0*

1. $d^n\left(\alpha\, u + \beta\, v\right) = \alpha\, d^n u + \beta\, d^n v$*,*
2. $d^n\left(u\, v\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot d^{(n-k)}u\, d^{(k)}v$*.*

▶ Следует из только что доказанного утверждения и свойств производных старших порядка, рассмотренных в прошлом параграфе. ◀

Замечание 2. Для дифференциалов порядка выше первого, не выполнено свойство инвариантности. Например, если $y = f(x)$, $x = g(t)$, то

$$d^2y = d\left(y' \cdot dx\right) = dy' \cdot dx + y' \cdot d(dx) = y''dx^2 + y'd^2x.$$

И, поскольку d^2x не обязано равняться нулю в случае зависимой переменной $x = g(t)$, эта формула отличается от формулы второго дифференциала $d^2y = y''dx^2$ в случае независимой переменный x.

2. Теоремы о производной

Теорема 1 (Теорема Ферма)**.** *Функция $f(x)$ определена в окрестности точки c и дифференцируема в этой точке. Если функция принимает в точке c максимальное (минимальное) значение, то $f'(c) = 0$.*

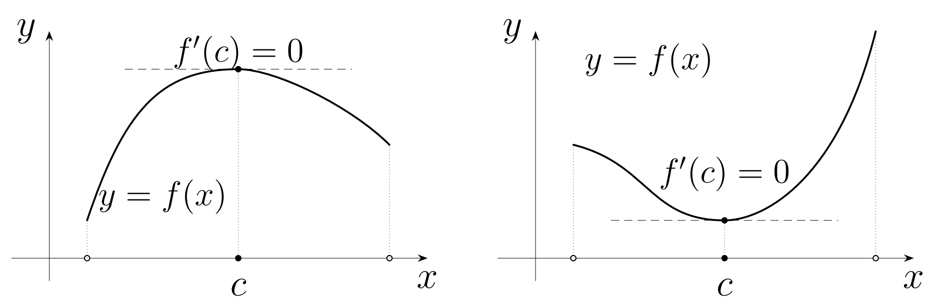

Рис. 1. геометрический смысл теоремы Ферма

▶ Докажем теорему для случая максимального значения. Для минимального доказательство аналогично. Итак, пусть в точке c функция принимает максимальное значение. Тогда в некоторой окрестности точки c выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(c)$ для всех x из этой окрестности. Из дифференцируемости в точке c следует, что

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Числитель, в силу максимальности значения функции в точке c, неположителен в рассмотренной выше окрестности. При $x > c$ знаменатель $x - c > 0$, а тогда $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$. По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

Аналогично, при $x < c$ знаменатель $x - c < 0$, а тогда $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$. По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

То есть $0 \leqslant f'(c) \leqslant 0$, следовательно, $f'(c) = 0$. ◀

Теорема 2 (Теорема Ролля)**.** *Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует вещественное число $c \in (a; b)$ такое, что $f'(c) = 0$.*

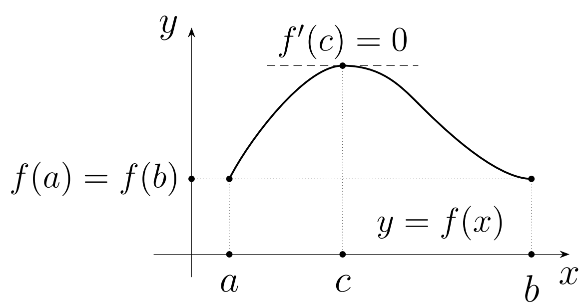

Рис. 2. геометрический смысл теоремы Ролля

▶ Если функция постоянна на $[a; b]$, то ее производная в любой точке интервала $(a; b)$ равна нулю, а значит, в качестве c можно брать любую точку этого интервала. В дальнейшем считаем, что функция отлична от константы. Из непрерывности функции на промежутке $[a; b]$ и второй теоремы Вейерштрасса следует, что функция достигает своих точных верхней и нижней граней на $[a;b]$. То есть существуют точки x_* и x^* из промежутка $[a;b]$ такие, что

$$f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x_*) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Это означает, что в точке x^* функция принимает максимальное значение, а в точке x_* — минимальное. Поскольку функция не равна константе, то $f(x^*) \neq f(x_*)$. Условие теоремы $f(a) = f(b)$ гарантирует, что обе точки x_* и x^* не могут быть концами промежутка $[a;b]$, следовательно, по крайней мере одна из этих точек лежит в интервале $(a;b)$. Эту точку обозначим за c.

В точке c функция $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение и дифференцируема. По теореме Ферма производная $f'(c) = 0$. ◀

Теорема 3 (Теорема Лагранжа)**.** *Функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда существует точка* $c \in (a;b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{1}$$

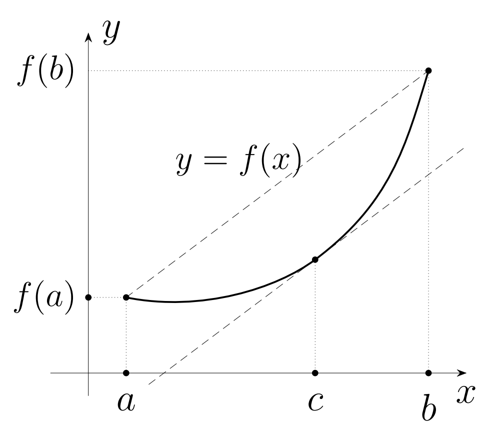

Рис. 3. геометрический смысл теоремы Лагранжа

Замечание 1 (геометрический смысл). Внутри интервала $(a;b)$ найдется точка, касательная в которой к графику функции, параллельна хорде, стягивающей концы этого графика.

Замечание 2. Эту формулу часто называют формулой конечных приращений.

▶ Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, где λ — некоторое вещественное число. Подберем λ так, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условиям теоремы Ролля.

$$\varphi(a) = f(a) - \lambda a,$$
$$\varphi(b) = f(b) - \lambda b.$$

Если $\varphi(a) = \varphi(b)$, то

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b,$$
$$\lambda(b - a) = f(b) - f(a),$$
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Кроме того, функция φ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Это следует из условия теоремы и дифференцируемости независимой переменной x, рассматриваемой как функция, на всей вещественной оси. Все условия теоремы Ролля выполнены, следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $\varphi'(c) = 0$. Тогда

$$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda,$$
$$f'(c) - \lambda = 0,$$
$$f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

◀

Следствие 1. *Функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале. Точки*

x_0 и $x_0 + \Delta x$ принадлежат этому интервалу. Тогда найдется такое $\theta \in (0;1)$, что

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \tag{2}$$

▶ Пусть $\Delta x > 0$, $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$. По теореме Лагранжа найдется число $c \in (x_0; x_0 + \Delta x)$ такое, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c)$$

$0 < c - x_0 < \Delta x, \quad 0 < \frac{c - x_0}{\Delta x} < 1$. Возьмём $\theta = \frac{c - x_0}{\Delta x} \in (0;1)$. Тогда $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x$. В итоге

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x), \quad \theta \in (0;1).$$

Откуда и следует требуемое. Случай $\Delta x < 0$ рассматривается аналогично. ◀

Теорема 4 (Теорема Коши)**.** *Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$. $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a;b)$. Тогда существует $c \in (a;b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

▶ Сначала заметим, что знаменатель левой части отличен от нуля. Иначе $g(a) = g(b)$, значит, по теореме Ролля $g'(c) = 0$ для некоторого $c \in (a, b)$. Противоречие с условием теоремы. Далее ход доказательства такой же, как и в теореме Лагранжа.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Число λ подберем так, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условию теоремы Ролля $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$
$$f(b) - f(a) = \lambda(g(b) - g(a)),$$
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Кроме того, функция φ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) как разность непрерывных и, соответственно, дифференцируемых функций. Все условия теоремы Ролля выполнены, следовательно, существует $c \in (a, b)$ такое, что $\varphi'(c) = 0$. Значит,

$$f'(c) - \lambda g'(c) = \varphi'(c) = 0,$$
$$f'(c) = \lambda g'(c),$$
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Что и требовалось. ◀

Замечание 3. От условия $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a; b)$ нельзя отказаться. В самом деле, если рассмотреть функции $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ на отрезке $[-1,\ 1]$, то $g'(x) = 3\,x^2$ и $g'(0) = 0$. Условие теоремы не выполнено. Оставшиеся условия не могут гарантировать выполнения равенства теоремы Коши. И действительно, формула неверна:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0,$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x}.$$

Но $\frac{2}{3x}$ не может быть равна нулю ни при каком $x \in (-1; 1)$.

Разработал старший преподаватель

кафедры высшей математики Одинцов А.В.