

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 02. Важнейшие теоремы о дифференцируе-
мых функциях

Лекция № 05. Правило Лопиталя

Учебные вопросы:

1. Правило Лопиталя ($\left[\frac{0}{0}\right]$)
2. Правило Лопиталя ($\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)
3. Примеры
4. Формула Тейлора

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).- Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Правило Лопиталя

Теорема 1. Пусть x_0 — вещественное число или одна из бесконечностей. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки x_0 , $g'(x) \neq 0$ для всех x из этой окрестности и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Если существует предел (конечный или бесконечный) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1)$$

► Обозначим за $\mathring{W}(x_0)$ проколотую окрестность из условия. Рассмотрим сначала случай когда $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определим функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathring{W}(x_0) \\ 0, & x = x_0 \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathring{W}(x_0) \\ 0, & x = x_0 \end{cases}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = F(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 = G(x_0),$$

то $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны в точке x_0 . Кроме того, эти функции дифференцируемы в $\mathring{W}(x_0)$, поскольку совпадают с дифференцируемыми функциями $f(x)$ и $g(x)$. Пусть теперь $x \in \mathring{W}(x_0)$. Рассмотрим замкнутой промежуток с концами x и x_0 . На этом промежутке функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны и дифференцируемы внутри него. Тогда по теореме Коши между точками x и x_0 существует точка $c(x)$,

зависящая от x , такая, что

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c(x))}{G'(c(x))}.$$

Исходя из определений функции $F(x)$ и $G(x)$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

$|c(x) - x_0| \leq |x - x_0| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} c(x) = x_0$. Тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теперь рассмотрим случай когда $x_0 = \infty$.

Пусть $P(t) = f(\frac{1}{t})$, $Q(t) = g(\frac{1}{t})$. Так как $x = \frac{1}{t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, то по теореме о дифференцируемости сложной функции, $P(t)$ и $Q(t)$ дифференцируемы в проколотой окрестности 0. $\lim_{t \rightarrow 0} P(t) = \lim_{t \rightarrow 0} Q(t) = 0$, $Q'(t) = (g(\frac{1}{t}))' = -g'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2} \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности нуля. Условия теоремы проверены, а тогда, по доказанной части правила Лопиталя получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t)}{Q(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(t)}{Q'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-f'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}}{-g'(\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$



Теорема 2. Пусть x_0 — вещественное число или одна из бесконечностей. Функ-

ции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки x_0 , $g'(x) \neq 0$ для всех x из этой окрестности и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2)$$

► Рассмотрим сначала случай когда $x_0 = +\infty$.

Из условия теоремы следует, что $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором интервале $(a; +\infty)$. Определим функцию $h(x) = |f(x)| + |g(x)|$. Эта функция непрерывна при $x > a$ и бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$. Учитывая, что непрерывный образ промежутка — промежуток, получаем, что $h((a; +\infty)) = \langle c; +\infty \rangle$. По определению предела найдется число $d > 0$ такое, что любого $x > d$ выполняются неравенства $|f(x)| > c^2$, $|g(x)| > c^2$.

Для $x > d$ множество решений (относительно t) уравнения

$$h(t) = \min \left(\sqrt{|f(x)|}, \sqrt{|g(x)|} \right)$$

не пусто и ограничено сверху. Точную верхнюю грань этого множества обозначим за $\theta(x)$. Функция $t = \theta(x)$ определена при $x > d$ и является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\left| \frac{f(\theta(x))}{f(x)} \right| \leq \frac{h(\theta(x))}{|f(x)|} \leq \frac{\sqrt{|f(x)|}}{|f(x)|} = \frac{1}{\sqrt{|f(x)|}} \rightarrow 0,$$

и аналогично

$$\left| \frac{g(\theta(x))}{g(x)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|g(x)|}} \rightarrow 0.$$

Значит, при $x \rightarrow +\infty$

$$f(\theta(x)) = o(f(x)), \quad g(\theta(x)) = o(g(x)).$$

Следовательно,

$$f(x) \sim f(x) - f(\theta(x)), \quad g(x) \sim g(x) - g(\theta(x)),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(\theta(x))}{g(x) - g(\theta(x))}.$$

По теореме Коши между точками x и $\theta(x)$ существует точка $c(x)$, зависящая от x , такая, что

$$\frac{f(x) - f(\theta(x))}{g(x) - g(\theta(x))} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Так как x и $\theta(x)$ бесконечно большие функции, то и $c(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$. Тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Случай $x_0 = -\infty$ получается из рассмотренного заменой $x = -t$, случай $x_0 = \infty$ получается из предыдущих и критерия существования предела при $x \rightarrow \infty$.

Случай $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $x = x_0 + \frac{1}{t}$, $P(t) = f\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)$, $Q(t) = g\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P'(t)}{Q'(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-f'\left(x_0 + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}{-g'\left(x_0 + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f'\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)}{g'\left(x_0 + \frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$



Замечание 1. Обе предыдущие теоремы верны для односторонних пределов

Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$, $a > 1$, $\alpha > 0$.

Решение. Числитель и знаменатель бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$, дифференцируемые на множестве положительных чисел. Кроме того, производная знаменателя $(a^x)' = a^x \ln a$ отлична от нуля. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \frac{\alpha}{\ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{a^x}.$$

Если $\alpha > 1$, то снова получается отношение степенной бесконечно большой к показательной бесконечно большой. Можно применять правило Лопиталя до тех пор, пока степень в числителе будет положительной.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \frac{\alpha}{\ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{a^x} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\ln^2 a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-2}}{a^x} = \dots \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{\ln^n a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-n}}{a^x},\end{aligned}$$

где n — целая часть α . Если α — натуральное, то $\alpha = n$ и под пределом получаем бесконечно малую $\frac{1}{a^x}$. В противном случае $n < \alpha < n+1$ и снова можно

применить правило Лопиталя. С учетом $\alpha - n - 1 < 0$, имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(\alpha - n)}{\ln^{n+1} a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-n-1}}{a^x} = 0.$$

Объединяя оба случая, получаем ответ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0+0} (x^\alpha \log_a x)$, $\alpha > 0$, $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение. Под знаком предела произведение бесконечно малой на бесконечном большую. Преобразуем выражение к отношению бесконечно больших

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x^\alpha \log_a x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\log_a x}{x^{-\alpha}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{(-\alpha x^{-\alpha-1})} = -\frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha = 0.$$

Пример 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta}$, $\beta > 0$, $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{1}{\beta \ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\beta} = 0.$$

Замечание 2. Пример (1) показывает, что показательная бесконечно большая имеет больший порядок, чем степенная, а примеры (2) и (3) — что степенная бесконечно большая имеет больший порядок, чем логарифмическая.

Замечание 3. Раскрытие неопределенности другого вида можно свести к рассмотренным в правиле Лопиталя неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. $[0 \cdot \infty]$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \cdot v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{(v(x))^{-1}}. \text{ Получаем неопределённость } \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ или } \left[\frac{0}{0}\right].$$

2. $[\infty - \infty]$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - v(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \cdot \left(1 - \frac{v(x)}{u(x)}\right)$. В случае $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{u(x)} = 1$ ситуация сводится к неопределенности $[0 \cdot \infty]$, иначе неопределенности нет. Так же можно пытаться привести исходную разность к общему знаменателю.

3. $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$. Вычисление сведётся к нахождению предела $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \cdot \ln u(x)$ и неопределённости $[0 \cdot \infty]$.

Замечание 4. Применение правила Лопиталя часто полезно совмещать с заменой на эквивалентную.

Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} \right)$.

Решение. Используя эквивалентность $\ln(1+t) \sim t$ при $t \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} \right) &\stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x)}{x \cdot \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x)}{-x^2} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-x}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{1-x}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin x}$.

Решение. Найдем предел $\ln(x^{\sin x}) = \ln x \cdot \sin x$ Используя эквивалентность $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x \cdot \sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\ln x \cdot \sin x} = e^0 = 1$.

2. Формула Тейлора

Определение 1. Функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1)$$

называют многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 порядка n .

Определение 2. Функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad (2)$$

называют остатком формулы Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 порядка n , а

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x) \quad (3)$$

— разложением функции $f(x)$ в точке x_0 по формуле Тейлора порядка n .

Утверждение 1. Пусть $0 \leq m \leq n$. Тогда

$$T_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0), \quad r_n^{(m)}(x_0) = 0. \quad (4)$$



Если $k < m$, то производная по переменной x функции $(x - x_0)^k$ порядка m равна нулю, а для $k \geq m$ производную можно записать в виде:

$$\left((x - x_0)^k\right)^{(m)} = k(k-1) \dots (k-m+1) (x - x_0)^{k-m} = \frac{k!}{(k-m)!} (x - x_0)^{k-m}.$$

Следовательно,

$$T_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \frac{k!}{(k-m)!} (x-x_0)^{k-m} = \sum_{k=m}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!} (x-x_0)^{k-m}.$$

Слагаемое, соответствующее $k = m$, равно $\frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-m)!} \cdot 1 = f^{(m)}(x_0)$, а при $k > m$ и $x = x_0$, значение степени $(x-x_0)^{k-m} = 0$. Следовательно,

$$T_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0),$$
$$r_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - T_n^{(m)}(x_0) = 0.$$



**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**