



Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 01. Элементы теории множеств и математической логики

Лекция № 02. Отображения

Учебные вопросы:

1. Понятие отображения
2. Сужение отображения
3. Образ множества
4. Прообраз множества
5. Инъекция, сюръекция
6. Композиция отображений
7. Обратное отображение
8. График отображения

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. - (Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Отображения (функции)

1⁰. Понятие отображения.

Пусть X, Y — множества. *Отображением (функцией)*, определенным на X со значениями в Y называется правило f , ставящее каждому $x \in X$ в соответствие некоторый элемент $y \in Y$. Запись

$$f : X \rightarrow Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y \quad (1)$$

означает, что f отображает X в Y .

X называется *множеством (областью) определения*, Y — *множеством прибытия* отображения f . Элемент y , соответствующий элементу x в силу закона f , называется *значением отображения f в точке x* . Значение f в точке x обозначают через $f(x)$.

Примеры. 1) $X = Y = \mathbb{R}$, правило f ставит каждому вещественному числу x вещественное число $y = x^2$.

2) Проекция декартова произведения:

$$\begin{aligned} pr_1 : X \times Y &\rightarrow X, pr_1(x, y) = x; \\ pr_2 : X \times Y &\rightarrow Y, pr_2(x, y) = y. \end{aligned}$$

3) Пусть $P(X)$ — совокупность всех подмножеств множества X .

Каждому $A \in P(X)$ поставим в соответствие его дополнение CA . Получим отображение $P(X) \rightarrow P(X)$.

Строго говоря, определяя конкретную функцию, мы должны указать множества X и Y и описать правило f . Однако часто из контекста понятно, о каких множествах идет речь, так что можно ограничиться описанием

правила. Фразу «функция f действует по правилу $f(x) = 2x + 3$ » будем коротко записывать в виде

$$f : f(x) = 2x + 3, \quad x \xrightarrow{f} 2x + 3 \quad \text{или} \quad y = 2x + 3.$$

Символ x , обозначающий произвольный элемент множества X определения функции называют *аргументом функции* f или *независимой переменной*. В такой терминологии для функции можно использовать обозначение $y = f(x)$ и называть y зависимой переменной. Независимую переменную можно считать тождественной функцией на X .

2⁰. Сужение отображения.

Если $f : X \rightarrow Y$, а $E \subset X$, то отображение $g : E \rightarrow Y$, действующее по формуле

$$g(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in E,$$

называется *сужением* f на множество E . Для сужения используют обозначение $f|_E$. Функция f называется *продолжением* для g .

3⁰. Образ множества.

Пусть $f : X \rightarrow Y$, а $E \subset X$. Множество

$$f(E) = \{y \mid \exists x \in E \ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\} \quad (2)$$

называется *образом* множества E под действием отображения f . Образ $f(X)$ множества определения называется *множеством значений*.

4⁰. Прообраз множества.

Пусть $f : X \rightarrow Y$, а $U \subset Y$. Множество

$$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \quad (3)$$

называется *прообразом* множества U при отображении f .

5⁰. Инъекция, сюръекция.

Пусть $f : X \rightarrow Y$. Отображение f называется *взаимно однозначным*, или *инъекцией*, если в разных точках оно принимает разные значения:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (3)$$

Отображение f называется *сюръекцией*, если множество значений совпадает с множеством прибытия: $f(X) = Y$.

Про сюръекцию $f : X \rightarrow Y$ говорят также, что f отображает X **на** Y .

Отображение f называется *биекцией*, если оно является как инъекцией, так и сюръекцией. Биекция — это взаимно однозначное отображение одного множества **на** другое

6⁰. Композиция отображений.

Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Отображение $h : X \rightarrow Z$, действующее по формуле

$$h(x) = g(f(x)) \text{ для } x \in X, \quad (4)$$

называется *композицией* (*суперпозицией*) отображений f и g и обозначается через $g \circ f$.

Пример. $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(y) = 2y$. Тогда

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(2y) = 2y + 1, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2.$$

7⁰. Обратное отображение.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — биекция. Построим отображение $g : Y \rightarrow X$. Взяв произвольный $y \in Y$, подберем $x \in X$, для которого $f(x) = y$. (Такой x

найдется, поскольку f — сюръекция, x —единствен, поскольку f — инъекция). Полагаем $g(y) = x$. Построенное отображение g называют обратным к f и пишут $g = f^{-1}$.

Отображение $g: Y \rightarrow X$ является обратным к $f: X \rightarrow Y$ в том и только в том случае, если

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y). \quad (5)$$

Отображение $I = I_X: X \rightarrow X$, $I(x) = x$ называется *тождественным*.

Задача. $g = f^{-1} \Leftrightarrow g \circ f = I_X \wedge f \circ g = I_Y$

8⁰. График отображения.

Пусть $f: X \rightarrow Y$. *Графиком* отображения f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}. \quad (6)$$

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.