

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 02. Важнейшие теоремы о дифференцируе-
мых функциях

Лекция № 06. Формула Тейлора

Учебные вопросы:

1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано
2. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена
3. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа
4. Монотонность дифференцируемых функций

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).- Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 1. Функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда при $x \rightarrow x_0$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned} \quad (1)$$

► Рассмотрим остаток формулы Тейлора $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Воспользовавшись утверждением предыдущего параграфа и правилом Лопиталя $n - 1$ раз, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{1}{n} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{1}{n(n-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r''_n(x)}{(x - x_0)^{n-2}} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \dots \\ \dots = \frac{1}{n(n-1) \dots 2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{(x - x_0)^1}. \end{aligned}$$

Применение правила Лопиталя было оправдано тем, что все производные были дифференцируемы в проколотой окрестности точки x_0 . В последнем пределе также есть неопределенность, но применять правило Лопиталя уже нельзя, поскольку условия теоремы гарантируют дифференцируемость $r_n^{(n-1)}(x)$ только в точке x_0 . Применим определение производной

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{(x - x_0)^1} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \\ = \frac{1}{n!} \cdot \left(r_n^{(n-1)} \right)'(x_0) = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0. \end{aligned}$$

По определению «о» малого получаем, что $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$, а

тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + r_n(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$



Замечание 1. $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$ — остаток в форме Пеано, формула из формулировки теоремы — формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

Утверждение 1. при $x \rightarrow 0$

$$1. e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\begin{aligned} 2. \sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \end{aligned}$$

$$3. \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\begin{aligned} 5. (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Замечание 2. Если $x_0 = 0$, то формулу Тейлора также называют формулой Маклорена.

► $x_0 = 0, \quad x \rightarrow 0.$

1. $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = (e^x)^{(k)} = e^x$, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, $r_n(x) = o(x^n)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. $f(x) = \sin x$, $f^{(k)}(x) = (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

$$f^{(k)}(0) = \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \sin \pi m & , k = 2m \\ \sin\left(\pi m + \frac{\pi}{2}\right) & , k = 2m + 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , k = 2m \\ (-1)^m & , k = 2m + 1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^n \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $r_{2n+2}(x) = o(x^{2n+2})$, получаем требуемое.

3. $f(x) = \cos x$, $f^{(k)}(x) = (\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

$$f^{(k)}(0) = \cos \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \cos \pi m & , k = 2m \\ \cos\left(\pi m + \frac{\pi}{2}\right) & , k = 2m + 1 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^m & , k = 2m \\ 0 & , k = 2m + 1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $r_{2n+1}(x) = o(x^{2n+1})$, получаем требуемое.

4. $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$. При $k > 0$ производная

$$f^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \end{aligned}$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$,

$$f^{(k)}(x) = ((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1) (1+x)^{\alpha-n},$$

$$f(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = (x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$



Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-\frac{x}{3}} \sqrt[3]{1+x} - \sin x}{x^4}$.

Решение. Разложим числитель по формуле Маклорена до 4 порядка.

$$e^{-\frac{x}{3}} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{162} + o(x^3), \text{ где } t = -\frac{x}{3},$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3).$$

Учитывая, что $g(x) \cdot o(x^3) = o(x^3)$ для ограниченной в проколотой окрестности нуля функции $g(x)$, получаем

$$e^{-\frac{x}{3}}\sqrt[3]{1+x} = \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3\right) + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{54}x^3\right) + \left(-\frac{x^3}{162}\right) + o(x^3),$$

$$xe^{-\frac{x}{3}}\sqrt[3]{1+x} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{9}x^4 + o(x^4),$$

$$xe^{-\frac{x}{3}}\sqrt[3]{1+x} - \sin x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}x^4 + o(x^4).$$

В итоге

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-\frac{x}{3}}\sqrt[3]{1+x} - \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{9}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{9} + o(1)\right) = \frac{1}{9}.$$

2. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема 1. Функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда для всякого x из этой окрестности существует число ς_x , лежащее между

x и x_0 такое, что

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Замечание 1. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ — остаток в форме Лагранжа

► Надо доказать, что остаток в формуле Тейлора имеет вид, указанной в замечании (1). Для этого рассмотрим функции

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k, \quad \psi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Найдем производную по переменной t

$$\varphi'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1}.$$

Во второй сумме заменим k на $k + 1$ (сначала замена $k = m + 1$, затем переобозначение m за k)

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n, \\ \psi'(t) = -(n+1)(x - t)^n. \end{aligned}$$

Кроме того, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(x)$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$. По теореме

Коши между точками x и x_0 существует точка c_x , зависящая от x , такая, что

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c_x)}{\psi'(c_x)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x - c_x)^n}{-(n+1)(x - c_x)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}.$$

Отсюда получаем требуемую форму остатка

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$



3. Монотонность и дифференцируемость

Теорема 1 (Критерий постоянства). *Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\langle a; b \rangle$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда*

$$f(x) \text{ постоянна на } \langle a; b \rangle \Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ для всех } x \in (a; b).$$

► Необходимость следует из того, что производная постоянной функции равна нулю. Докажем достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a; b)$. Докажем, что $f(x)$ — постоянна на $[a; b]$. Возьмём произвольные $x_1, x_2 \in [a; b]$, такие, что $x_1 < x_2$. Так как функция f непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2) , то по теореме Лагранжа существует вещественное $c \in (x_1, x_2)$ такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Так как по условию теоремы $f'(c) = 0$, то

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

а значит, $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности выбора x_1 и x_2 , получаем, что $f(x)$ — постоянна $[a; b]$. ◀

Теорема 2 (Критерий монотонности). $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b \rangle$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда

- $f(x)$ возрастает на промежутке $\langle a; b \rangle \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (a; b)$. (1)

- $f(x)$ убывает на промежутке $\langle a; b \rangle \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a; b)$. (2)

► Рассмотрим (1). Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a; b]$. Это означает, что для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a; b)$ и произвольное $\Delta x > 0$ такое, что $x_0 + \Delta x < b$. Тогда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Так как x_0 выбрана произвольно, получаем $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a; b)$.

Докажем достаточность. Возьмём произвольные $x_1, x_2 \in [a; b]$, такие что $x_1 < x_2$. Так как f непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2) , то по теореме Лагранжа существует число $c \in (x_1, x_2)$ такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

По условию теоремы $f'(c) \geq 0$, следовательно,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,$$

а значит, $f(x_2) \geq f(x_1)$. В силу произвольности x_1 и x_2 получаем возрастание $f(x)$ на $[a; b]$.

Для случая (2) достаточно рассмотреть функцию $g(x) = -f(x)$ и применить уже доказанное утверждение. ◀

Теорема 3 (Достаточное условие строгой монотонности). *$f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b \rangle$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда*

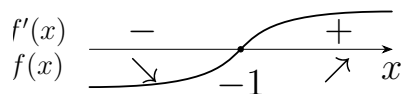
- если $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a; b)$,
то $f(x)$ строго возрастает на промежутке $\langle a; b \rangle$. (3)

- если $f'(x) < 0$ для $\forall x \in (a; b)$,
то $f(x)$ строго убывает на промежутке $\langle a; b \rangle$. (4)

► Для доказательства (3) достаточно в доказательстве достаточности предыдущей теоремы заменить нестрогие неравенства на строгие. (4) доказывается рассмотрением функции $g(x) = -f(x)$. ◀

Пример 1. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x e^x$.

Решение. Находим производную функции $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1+x) e^x$. Методом интервалов находим знак:



Таким образом, функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(-\infty; -1)$ и строго возрастает на интервале $(-1; \infty)$.

Замечание 1. Обратное утверждение к теореме (3) неверно. Функция $f(x) = x^3$ возрастает на всей вещественной оси, но $f'(0) = 0$.

**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**