



ПОЛИТЕХ

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами диф-
ференциального исчисления

Лекция № 07. Экстремум дифференцируемой функ-
ции

Учебные вопросы:

1. Определение точек экстремума
2. Необходимое условие экстремума
3. Достаточное условие экстремума
4. Частный случай достаточного условия экстремума для дважды дифференцируемой функции

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Криков А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Криков, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Экстремум функции

Определение 1 (экстремум на множестве). $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Если для $\forall x \in E$

- $f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$ на множестве E .
- $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$ на множестве E .

Определение 2 (локальный экстремум). $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Если существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для $\forall x \in U(x_0) \cap E$

- $f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$.
- $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$.

Определение 3 (строгий локальный экстремум). $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Если существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для $\forall x \in \mathring{U}(x_0) \cap E$

- $f(x) > f(x_0)$, то x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$.
- $f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$.

Замечание 1. Экстремум функции — её максимум или минимум.

Замечание 2. Точку экстремума, не являющуюся точкой строгого экстремума, называют точкой нестрогого экстремума.

Замечание 3. x_0 — точка максимума (минимума) $f(x)$, то x_0 — точка минимума (максимума) $(-f(x))$.

Пример 1. Используя определение, найти точки экстремума функции $f(x) = 2x - x^2$.

Решение.

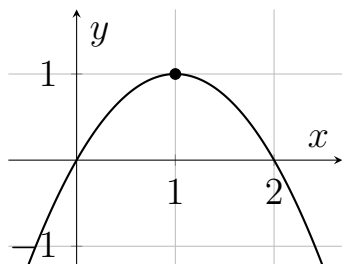


Рис. 1.

$f(x) = 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 \leq 1 = f(1)$ при всех вещественных x . Следовательно, $x = 1$ — точка глобального максимума на $\mathbb{R}$.

Пример 2. Используя определение, найти точки экстремума функции $f(x) = |x|$.

Решение.

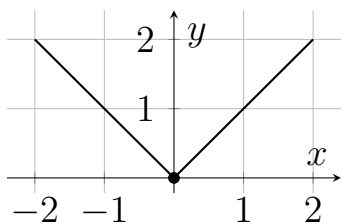


Рис. 2.

$f(x) = |x| > 0 = f(0)$ при всех вещественных $x \neq 0$. Следовательно, $x = 0$ — точка строгого глобального минимума на $\mathbb{R}$.

Пример 3. Используя определение, найти точки экстремума функции $f(x) = |1 - x| + |1 + x|$.

Решение.

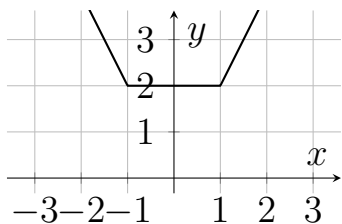


Рис. 3.

Если $x \in [-1; 1]$, то $f(x) = (1 - x) + (1 + x) = 2$, если $x > 1$, то $f(x) = -(1 - x) + (1 + x) = 2x > 2$, а если $x < -1$, то $f(x) = (1 - x) - (1 + x) = -2x > 2$. Таким образом, любая точка из промежутка $[-1; 1]$ является точкой нестрогого глобального минимума на $\mathbb{R}$.

Пример 4. Используя определение, найти точки экстремума функции $f(x) = |1 - |x||$.

Решение.

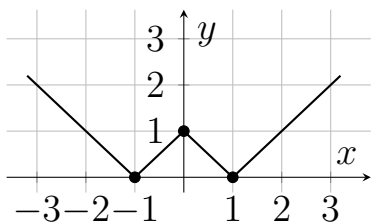


Рис. 4.

$f(-x) = f(x)$, следовательно, функция чётная. Если $x \in [0; 1]$, то $f(x) = |1 - x| = 1 - x$, если $x > 1$, то $f(x) = |1 - x| = -(1 - x) = x - 1$. При $0 < |x| < 1$ функция $f(x) = 1 - |x|$, $f(x) < 1 = f(0)$, следовательно, $x = 0$ — точка строгого локального максимума.

При вещественном $x \notin \{-1, 1\}$ верно неравенство $f(x) = |1 - |x|| > 0 = f(\pm 1)$. Следовательно, $x = -1$ и $x = 1$ — точки строгого глобального минимума.

Других точек экстремума в этих примерах нет, что следует из свойств параболы и линейной функции.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). *Функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0 . Если x_0 — точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

► Следует из теоремы Ферма. ◀

Замечание 4. Теорема (??) не даёт достаточного условия экстремума. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$ и точку $x_0 = 0$. Тогда при $x > 0$ функция $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$, а при $x < 0$ функция $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$. Значит, точка $x_0 = 0$ не является ни точкой минимума, ни точкой максимума. Однако, $f'(0) = 0$.

Определение 4. $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Если $f'(x_0) = 0$, то x_0 называют стационарной точкой функции $f(x)$.

Теорема 2 (Достаточное условие экстремума дифференцируемой функции). *Функция $f(x)$ непрерывна в δ -окрестности $W_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{W}_\delta(x_0)$. Если*

1. *$f'(x) > 0$ при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при любом $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка строгого локального максимума,*
2. *$f'(x) < 0$ при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при любом $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка строгого локального минимума.*

► Докажем первое утверждение. Из того, что $f'(x) > 0$ при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и непрерывности $f(x)$ в точке x_0 по достаточному условию строгой монотонности следует, что $f(x)$ строго возрастает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$. Следовательно, $f(x) < f(x_0)$ при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Аналогично, из того, что $f'(x) < 0$ при любом $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ и непрерывности $f(x)$ в точке x_0 следует, что $f(x)$ строго убывает на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$. Как следствие, $f(x) < f(x_0)$ при любом $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Объединяя два случая, получаем

$$f(x) < f(x_0) \text{ при любом } x \in \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

что по определению означает, что x_0 — точка строгого локального максимума.

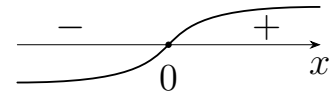
Для второго случая достаточно рассмотреть функцию $g(x) = -f(x)$ и применить уже доказанное утверждение. ◀

Замечание 5. То есть если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса (минуса) на минус (плюс), то x_0 — точка локального максимума (минимума).

Пример 5. Используя достаточное условие, найти точки экстремума функции $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

Решение. Производная $f'(x) = 2x$. При $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$.

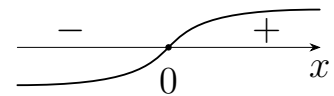
При переходе x через точку 0 производная меняет свой знак с минуса на плюс. По достаточному условию точка $x = 0$ — точка строгого локального минимума функции $f(x) = x^2$.



Пример 6. Используя достаточное условие, найти точки экстремума функции $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Решение. Производная $f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$. При $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при

$x > 0$ $f'(x) > 0$. Кроме того, $f(x)$ непрерывна при $x = 0$. При переходе x через точку 0 производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, точка $x = 0$ — точка строгого локального минимума функции $f(x) = |x|$.



Замечание 6. На замкнутом промежутке максимум (минимум) функции достигается в одном из его концов или в стационарной точке внутри промежутка.

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x - x^3$ на $[-2\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Решение. $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$. Находим стационарные точки:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Функция принимает наибольшее и наименьшее значение в стационарной точке или одном из концов промежутка. Таким образом, надо найти значение функции

в точках $x = -2\sqrt{3}$, $x = -1$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, а затем выбрать наибольшее и наименьшее. Несложные вычисления показывают, что

$$f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}, \quad f(-1) = -2, \quad f(1) = 2, \quad f(\sqrt{3}) = 0.$$

Наибольшее из них — $18\sqrt{3}$ (при $x = -2\sqrt{3}$), наименьшее — (-2) (при $x = -1$).

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума n -раз дифференцируемой функции).

$f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 . Пусть

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (1)$$

Тогда, если

1. *n чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума*
2. *n чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума*
3. *n нечётное, то x_0 — не является точкой экстремума*

► Разложим функцию в точке x_0 до порядка n по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано. Тогда при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Учитывая (??), получаем

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \\f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1).\end{aligned}$$

Так как $o(1)$ — бесконечно малая, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Рассмотрим случай $f^{(n)}(x_0) > 0$. По теореме о стабилизации знака функции в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0$.

Если n — чётное, то знаменатель положительный, а тогда и числитель положительный в $\mathring{U}(x_0)$. Следовательно, $f(x) > f(x_0)$ для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$. Из определения точки экстремума следует, что x_0 — точка строгого локального минимума.

Если n — нечетное, то знаменатель меняет свой знак при переходе через точку x_0 с минуса на плюс. Следовательно, $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $x \in \mathring{U}(x_0)$. Это означает, что точка x_0 не является точкой максимума. Аналогично, $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, а значит, x_0 не точка минимума. Из этого делаем вывод, что x_0 не является точкой экстремума.

Для случая $f^{(n)}(x_0) < 0$ рассматривается функция $g(x) = -f(x)$ и применяется уже доказанная часть теоремы. ◀

Следствие 1 (Достаточное условие экстремума дважды дифференцируемой функции). *$f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 . Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда, если*

1. $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума.

2. $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума.

Пример 8. Найти точки локального экстремума функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение. Функция дважды дифференцируема на всей вещественной оси.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Находим вторую производную $f''(x) = (3 - 3x^2)' = -6x$. Тогда

$f''(-1) = 6 > 0$, следовательно $x = -1$ — точка строгого локального минимума,

$f''(1) = -6 < 0$, следовательно $x = 1$ — точка строгого локального максимума.

**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**