ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Лекция № 08. Выпуклые функции

Учебные вопросы:

1. Определение выпуклых функций
2. Геометрический смысл выпуклости
3. Необходимое и достаточное условие выпуклости дифференцируемых функций
4. Выпуклость и касательная

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).- Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Выпуклые функции

Определение 1. *$f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Если для всяких $x_1, x_2 \in$ $\in \langle a, b\rangle$ и всякого $\alpha \in [0; 1]$ выполняется неравенство*

$$f\left(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\right) \leqslant \alpha\, f(x_1) + (1-\alpha)\, f(x_2), \tag{1}$$

то функцию $f(x)$ называют выпуклой вниз на промежутке $\langle a, b\rangle$.

Теорема 1. *$f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Функция выпукла вниз на этом промежутке тогда и только тогда, когда для всяких $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и лежащего между ними x выполняется неравенство*

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{2}$$

Замечание 1. Заметим, что в формулировке теоремы можно требовать, чтобы $x_1 < x_2$. Равносильность при этом сохранится.

▶ Для определенности считаем, что $x_1 < x_2$. Пусть $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Эта линейная функция (переменной α) устанавливает взаимно однозначное соответствие между промежутком $[0; 1]$ и промежутком $[x(0); x(1)] = [x_1; x_2]$. Выражая α через x, получаем $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Учитывая, что $1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, получаем, что неравенство (1) будет равносильно

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Что и требовалось доказать. ◀

Замечание 2. Прямая $y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ проходит через точку $(x_1; f(x_1))$ при $x = x_1$ и $(x_2; f(x_2))$ при $x = x_2$, то есть является секущей графика функции

$y = f(x)$, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ с $(x_2; f(x_2))$. Следовательно, функция выпукла вниз на промежутке тогда и только тогда, когда любая секущая к графику функции на этом промежутке лежит выше участка графика, стягиваемого этой секущей.

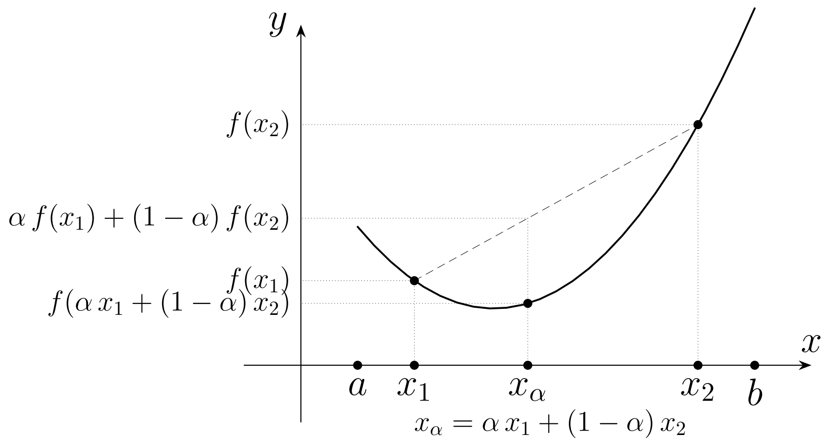

Рис. 1. Геометрический смысл выпуклости вниз.

Определение 2. *$f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Если для всяких $x_1, x_2 \in$ $\in \langle a, b\rangle$ и всякого $\alpha \in [0; 1]$ выполняется неравенство*

$$f\,(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \geqslant \alpha\, f(x_1) + (1-\alpha)\, f(x_2), \tag{3}$$

то функцию $f(x)$ называют выпуклой вверх на промежутке $\langle a, b\rangle$.

Замечание 3. Функция $y = f(x)$ выпукла вверх на промежутке тогда и только тогда, когда функция $y = -f(x)$ выпукла вниз на этом промежутке.

Замечание 4. Функция выпукла вверх на промежутке тогда и только тогда, когда любая секущая к графику функции на этом промежутке лежит ниже участка графика, стягиваемого этой секущей.

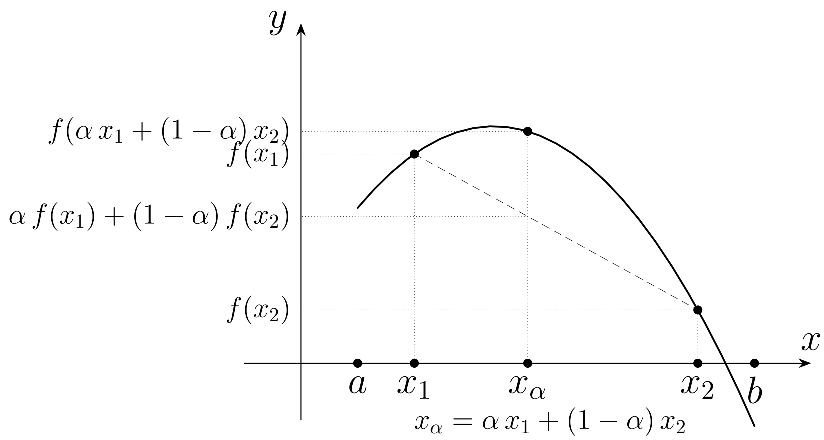

Рис. 2. Геометрический смысл выпуклости вверх.

Замечание 5. Если в этих определениях неравенства строгие при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in$ $\in (0;1)$, то говорят о строгой выпуклости. Из строгой выпуклости вниз (вверх) следует выпуклость вниз (вверх).

Замечание 6. Также выпуклые вниз функции называют выпуклыми, а выпуклые вверх — вогнутыми.

Пример 1. Исследовать выпуклость функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ по определению.

Решение.

$$f\left(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\right) = \left(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\right)^2,$$
$$\alpha\, f(x_1) + (1-\alpha)\, f(x_2) = \alpha\, {x_1}^2 + (1-\alpha)\, {x_2}^2.$$

Сравним эти выражения при $\alpha \in (0;1)$:

$$\left(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\right)^2 \gtrless \alpha\, {x_1}^2 + (1-\alpha)\, {x_2}^2,$$
$$\alpha^2\, {x_1}^2 + 2\,\alpha\, x_1\,(1-\alpha)\, x_2 + (1-\alpha)^2\, {x_2}^2 \gtrless \alpha\, {x_1}^2 + (1-\alpha)\, {x_2}^2,$$
$$0 \gtrless (\alpha - \alpha^2)\, x_1^2 - 2\alpha\,(1-\alpha)\, x_1\, x_2 + \left((1-\alpha) - (1-\alpha)^2\right) x_2^2,$$
$$0 \gtrless \alpha\,(1-\alpha)\left(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2\right),$$

$$0 \leqslant \alpha\,(1-\alpha)\,(x_1 - x_2)^2\,.$$

Причем неравенство будет строгим, если $x_1 \neq x_2$. Следовательно, при любых $\alpha \in (0;1)$ и любых различных x_1 и x_2

$$f\,(\alpha\,x_1 + (1-\alpha)\,x_2) < \alpha\,f(x_1) + (1-\alpha)\,f(x_2).$$

Откуда делается вывод о строгой выпуклости вниз этой функции на множестве вещественных чисел.

2. Выпуклость дифференцируемых функций

Теорема 1 (Критерий выпуклости дифференцируемой функции)**.** $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $\langle a;\,b\rangle$ *и дифференцируема на интервале* $(a;\,b)$. *Тогда*

- $f(x)$ *выпукла вниз на промежутке* $\langle a;\,b\rangle$ $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ *возрастает на интервале* $(a;\,b)$. (1)
- $f(x)$ *выпукла вверх на промежутке* $\langle a;\,b\rangle$ $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ *убывает на интервале* $(a;\,b)$. (2)

▶ Рассмотрим случай (1). По теореме (1) предыдущего параграфа функция выпукла вниз на $\langle a;\,b\rangle$ тогда и только тогда, когда для всяких $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$ и любого $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Преобразуем это неравенство равносильным образом:

$$\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$
$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot \left(f(x) - f(x_1)\right) \leqslant \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(f(x_2) - f(x)\right),$$
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

То есть функция выпукла вниз на $\langle a;\, b\rangle$ тогда и только тогда, когда для всяких $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$ и любого $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}. \tag{3}$$

Последовательно переходя к пределу в неравенстве (3) при $x \to x_1 + 0$ и $x \to x_2 - 0$, получаем

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2).$$

Тогда

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant f'_-(x_2) = f'(x_2),$$

что, в силу произвольности x_1 и x_2, означает возрастание производной $f'(x)$ на промежутке $\langle a;\, b\rangle$.

Обратно. Пусть $f'(x)$ возрастает на промежутке $\langle a;\, b\rangle$. Возьмём $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и $x \in (x_1; x_2)$. Тогда по теореме Лагранжа найдутся такие $\xi \in (x_1; x)$, $\eta \in (x; x_2)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'(\eta), \qquad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi).$$

Поскольку $\xi < x < \eta$, а функция $f'(x)$ возрастает, то $f(\xi) \leqslant f(\eta)$. Следовательно,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f(\xi)\leqslant f(\eta)=\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

что по (3) означает выпуклость функции вниз на промежутке $\langle a;\, b\rangle$.

Случай выпуклой вверх функции сводится уже доказанному рассмотрением функции $y=-f(x)$. ◀

Следствие 1. *$f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a;\, b\rangle$ и дифференцируема на интервале $(a;\, b)$. Тогда*

- *$f(x)$ выпукла вниз на промежутке $\langle a;\, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ график функции $f(x)$ лежит не ниже касательной, проведённой в любой точке интервала $(a;\, b)$.* (4)
- *$f(x)$ выпукла вверх на промежутке $\langle a;\, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ график функции $f(x)$ лежит не выше касательной, проведённой в любой точке интервала $(a;\, b)$.* (5)

▶ Рассмотрим случай (4). Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и $x_1 < x_2$. Напишем уравнение касательной в точках x_1 и x_2.

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1), \qquad y=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)$$

Из условия теоремы

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \qquad f(x_1) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$
$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1), \qquad f'(x_2)(x_2 - x_1) \geqslant f(x_2) - f(x_1),$$
$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2).$$

В силу произвольности x_1 и x_2 получаем, что $f'(x)$ возрастает на промежутке $\langle a, b\rangle$, значит, в силу критерия выпуклости, $f(x)$ выпукла вниз.

Докажем необходимость. Пусть x_0 — произвольная точка интервала $(a; b)$. Прямая $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — касательная к графику $y = f(x)$ в точке x_0. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Так как функция $f(x)$ выпукла вниз, то ее производная возрастает на промежутке. Тогда производная $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ не положительна при $x \in \langle a; x_0)$ и не отрицательна при $x \in (x_0; b\rangle$. Это означает, что x_0 — точка минимума функции $h(x)$ на промежутке $\langle a;\ b\rangle$. При $x \in \langle a;\ b\rangle$

$$h(x) \geqslant h(x_0) = 0,$$
$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \geqslant 0,$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Последнее означает, что на всём промежутке $\langle a;\ b\rangle$ график функции $f(x)$ не ниже касательной, проведенной в точке x_0. ◀

Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.