

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами диф-
ференциального исчисления

Лекция № 09. Точки перегиба, асимптоты, функции
заданные параметрически

Учебные вопросы:

1. Необходимое и достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемых функций
2. Понятие точки перегиба
3. Асимптоты функции
4. Функции, заданные параметрически

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Криков А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Криков, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Выпуклость дважды дифференцируемых функций

Теорема 1 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции). *Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b \rangle$ и дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$.*

- *$f(x)$ выпукла вниз на промежутке $\langle a; b \rangle \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ при любом $x \in (a; b)$.*
- *$f(x)$ выпукла вверх на промежутке $\langle a; b \rangle \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ при любом $x \in (a; b)$.*

► Следует из критерия монотонности дифференцируемой функции и теоремы (1) из второго параграфа предыдущей лекции. ◀

Замечание 1. Для запоминания соответствия между знаком второй производной и характером выпуклости достаточно рассмотреть функции $f(x) = x^2$ (выпукла вниз) и $f(x) = -x^2$ (выпукла вверх).

Пример 1. Найти промежутки выпуклости функции $f(x) = e^x$.

Решение. Так как $f''(x) = e^x \geq 0$ при любом вещественном x , то $f(x)$ выпукла вниз на всей вещественной прямой.

Пример 2. Найти промежутки выпуклости функции $f(x) = \ln x$.

Решение. Так как $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ при любом вещественном $x > 0$, то $f(x)$ выпукла вверх на множестве положительных чисел.

Пример 3. Найти промежутки выпуклости функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение. Вторая производная равна $f''(x) = (3 - 3x^2)' = -6x$. Поскольку $f''(x) > 0$ при $x < 0$ и $f''(x) < 0$ при $x > 0$, то функция $f(x)$ выпукла вверх на множестве положительных чисел и выпукла вниз на множестве отрицательных.

Определение 1. Функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $W_\delta(x_0)$. Если существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$ и характер выпуклости на промежутках $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ различен, то точку x_0 называют точкой перегиба функции $f(x)$.

Замечание 2. То есть если при переходе через точку x_0 характер выпуклости меняется и существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$, то точка x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Замечание 3. Также говорят, что точка $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема 2 (Достаточное условие перегиба). $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 , существует конечная или бесконечная производная в точке x_0 . Если на промежутках $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ с $\delta > 0$ вторая производная $f''(x)$ принимает значения разных знаков, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

► Для определенности считаем, что знак второй производной при переходе через точку x_0 меняется с плюса на минус. По критерию выпуклости функция $f(x)$ выпукла вниз на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и вверх на $(x_0, x_0 + \delta)$. Значит, при переходе через точку x_0 характер выпуклости меняется. Учитывая существование первой производной, получаем по определению точки перегиба, что x_0 — точка перегиба $f(x)$. ◀

Пример 4. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Решение. Находим производные $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. При $x > 0$ и $x < 0$ вторая производная принимает значения разных знаков и $f'(0) = 0 \in \mathbb{R}$, значит, $x_0 = 0$ — точка перегиба функции $f(x) = x^3$.

Пример 5. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

Решение. Находим производные $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$. При $x > 0$ и $x < 0$ вторая производная принимает значения разных знаков и $f'(0) = \infty$, значит, $x_0 = 0$ — точка перегиба функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Теорема 3 (Необходимое условие перегиба дважды дифференцируемой функции). *$f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 , а $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 . Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

► Для определенности считаем, что характер выпуклости при переходе через точку x_0 меняется с выпуклости вниз на выпуклость вверх. Тогда для некоторой δ -окрестности точки x_0 вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f''(x) \leq 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. По непрерывности второй производной и теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f''(x_0) = f''(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f''(x) \geq 0,$$

$$f''(x_0) = f''(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f''(x) \leq 0.$$

Откуда $f''(x_0) = 0$. ◀

2. Асимптоты функции

Определение 1. *$f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 . Если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$, то прямую $x = x_0$ называют вертикальной асимптотой функции $f(x)$.*

Пример 1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Решение. При $x \rightarrow +0$ функция $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, значит, $e^{\frac{1}{x}}$ — бесконечно большая. При $x \rightarrow -0$ функция $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, значит, $e^{\frac{1}{x}}$ — бесконечно малая. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Последнее равенство означает, что $x = 0$ — вертикальная асимптота функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Определение 2. $f(x)$ определена в окрестности $\pm\infty$. Если существуют $k \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{R}$ такие, что предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - l) = 0$, то прямую $y = kx + l$ называют наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Замечание 1. Если $k = 0$, то прямую $y = l$ называют горизонтальной асимптотой функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Утверждение 1. Функция $f(x)$ определена в окрестности $\pm\infty$. Если прямая $y = kx + l$ — наклонная асимптота функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$. Обратно, если эти два предела существуют и конечны, то прямая $y = kx + l$ — наклонная асимптота функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Пример 2. Найти наклонные асимптоты функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$.

Решение. Используя эквивалентность $(1 + t)^\mu - 1 \sim \mu t$ при $t \rightarrow 0$ и $\mu = \frac{1}{3}$, получаем

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = 1, \\ l &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} = 1. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что $y = x + 1$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.

Пример 3. Найти наклонные асимптоты функции $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение. Случай $x \rightarrow +\infty$. Используя эквивалентность $(1 + t)^\mu - 1 \sim \mu t$ при $t \rightarrow 0$ и $\mu = \frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2, \\ l &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $y = 2x$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

Случай $x \rightarrow -\infty$. При $x < 0$ $\sqrt{x^2 - 1} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$. Тогда

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 0, \\ l &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

3. Функции, заданные параметрически

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ функции непрерывные на промежутке $\langle a; b \rangle$. Тогда $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,
 $t \in \langle a; b \rangle$ будем называть функцией, заданной параметрически. Переменная $t \in \langle a; b \rangle$ — параметр.

Если точку $M(t) = (x(t), y(t))$ отметить на плоскости Oxy , то при изменении t , точка $M(t)$ будет перемещаться от точки A , соответствующей $t = a$, до точки B , соответствующей $t = b$ (в случае принадлежности a и b промежутку $\langle a; b \rangle$).

В итоге получится некоторая кривая, соединяющая A с B .

С физической точки зрения, эту кривую можно воспринимать как траекторию точки, если её координаты с течением времени t изменяются по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Эта кривая, вообще говоря, не будет графиком функции $y = f(x)$ (одному значению x может соответствовать не один y , а несколько), но, как правило, её можно разбить на конечное число графиков таких функций: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x), \dots$ $\dots y = f_n(x)$. Чтобы найти эти функции достаточно выразить t из уравнения $x = x(t)$, а затем найденное значение t подставить в выражение для $y = y(t)$. С практической точки зрения это не всегда возможно, поскольку нельзя выразить t через x в элементарных функциях.

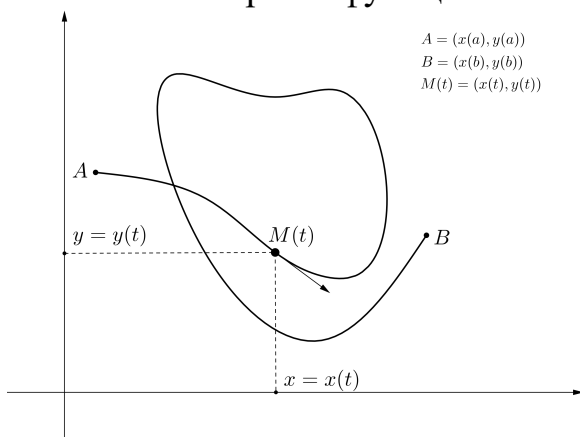


Рис. 1.

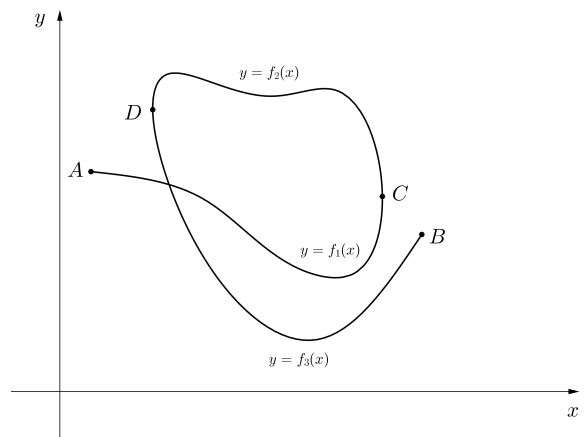


Рис. 2.

Пример 1. $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi)$. Найти явную зависимость y от x и построить график.

Решение. Из уравнения $x = R \cos t$ найдем t и подставим его в выражение $y =$

$= R \sin t$. То есть $f(x) = y(t(x))$, где $t = t(x)$ — обратная функция к $x = x(t)$.

Возможны два случая:

1) $t \in [0; \pi)$. Тогда $t = \arccos \frac{x}{R}$,

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) = y(t(x)) = y\left(\arccos \frac{x}{R}\right) = R \sin\left(\arccos \frac{x}{R}\right) = \\ &= R \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{x}{R}\right)} = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

– верхняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

2) $t \in [\pi; 2\pi)$, следовательно, $t - \pi \in [0; \pi)$. Тогда $x = -R \cos(t - \pi)$,
 $t - \pi = \arccos\left(-\frac{x}{R}\right)$, $t = \pi + \arccos\left(-\frac{x}{R}\right)$,

$$\begin{aligned} y &= f_2(x) = y(t(x)) = y\left(\pi + \arccos\left(-\frac{x}{R}\right)\right) = R \sin\left(\pi + \arccos\left(-\frac{x}{R}\right)\right) = \\ &= -R \sin\left(\arccos\left(-\frac{x}{R}\right)\right) = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

– нижняя полуокружность.

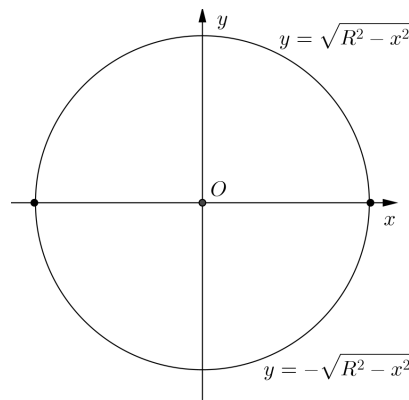


Рис. 3.

**Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.**