

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами диф-
ференциального исчисления

Лекция № 10. Функции, заданные параметрически
(продолжение)

Учебные вопросы:

1. Производные функции, заданной параметрически
2. Пример построения графика функции, заданной параметрически

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Криков А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Криков, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).- Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Непрерывность и дифференцируемость функций, заданных параметрически

Теорема 1. *Функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на промежутке $\langle a; b \rangle$, $x(t)$ строго монотонна на $\langle a; b \rangle$ и $x(\langle a; b \rangle) = \langle c; d \rangle$. Тогда существует единственная функция $f(x)$, непрерывная на $\langle c; d \rangle$ такая, что $y(t) = f(x(t))$ при всех $t \in \langle a; b \rangle$.*

► Из строгой монотонности, теоремы о непрерывности обратной функции и непрерывности функции $x(t)$ следует существование обратной функции $t = x^{-1}(x)$, непрерывной на $x(\langle a; b \rangle) = \langle c; d \rangle$. Для $x \in \langle c; d \rangle$ определим функцию $f(x) = y(x^{-1}(x))$. Эта функция непрерывна на промежутке $\langle c; d \rangle$ по теореме о непрерывности сложной функции. Кроме того,

$$f(x(t)) = y(x^{-1}(x(t))) = y(t)$$

при $t \in \langle a; b \rangle$. Этим доказано существование.

Если теперь $y(t) = f(x(t))$ при всех $t \in \langle c; d \rangle$, то взяв $t = x^{-1}(x)$, получаем, что $y(x^{-1}(x)) = f(x(x^{-1}(x))) = f(x)$ при $x \in \langle c; d \rangle$. Откуда следует единственность. ◀

Теорема 2. *Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на промежутке $(a; b)$, производная $x'(t)$ не меняет свой знак на интервале $(a; b)$ и $x((a; b)) = (c; d)$. Тогда функция $f(x)$ из теоремы (1) дифференцируема на $(c; d)$ и*

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (1)$$

► Из доказательства теоремы (1) известно, что $f(x) = y(x^{-1}(x))$. Тогда, исполь-

зую формулу производной сложной и обратной функции, получаем

$$f'(x) = y'(x^{-1}(x)) \cdot (x^{-1}(x))' = y'(x^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{x'(x^{-1}(x))}.$$

Тогда

$$f'(x(t)) = y'(x^{-1}(x(t))) \cdot \frac{1}{x'(x^{-1}(x(t)))} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$



Замечание 1. Если в теореме (2) дополнительно известно, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы на промежутке $(a; b)$, то $f(x)$ дважды дифференцируема на $(c; d)$ и

$$f''(x(t)) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}. \quad (2)$$

Последнее равенство получается дифференцированием обеих частей формулы из заключения теоремы (2), а дважды дифференцируемость — из того, что $f'(x) = \frac{y'(x^{-1}(x))}{x'(x^{-1}(x))}$ с дифференцируемым по условию числителем и знаменателем.

Замечание 2. Переобозначив $f(x)$ за $y(x)$, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (3)$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}, \quad (4)$$

причем производная в левой части равенства находится при $x = x(t)$.

Последнюю формулу можно записать в виде

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} \quad \text{или} \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (5)$$

Производную порядка n при $x = x(t)$ можно вычислить по формуле

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}. \quad (6)$$

2. Пример построения графика функции, заданной параметрически

Пример 1. Построить график функции $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4(1-t)} \\ y = \frac{t^3}{8(t-1)} \end{cases}$.

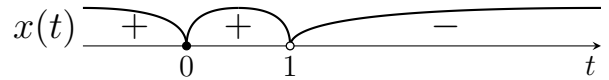
Решение.

1) Построение графиков $x(t)$ и $y(t)$ (без исследования выпуклости).

а) Промежутки знакопостоянства.

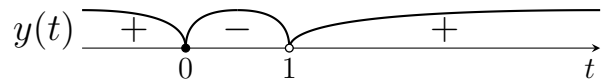
$$x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$$

- $x(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$,
- $x(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (1; +\infty)$,
- $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.



$$y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$$

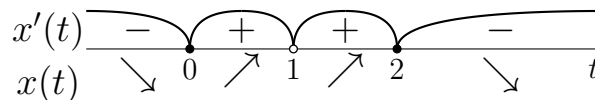
- $y(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,
- $y(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (0; 1)$,
- $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.



б) Монотонность и локальный экстремум функций $x(t)$ и $y(t)$.

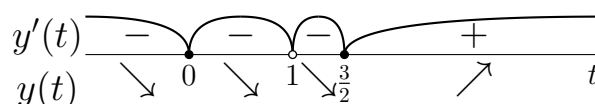
$$x'(t) = \frac{t(2-t)}{4(t-1)^2}$$

- $x(t)$ убывает на интервалах $(-\infty; 0)$, $(2; \infty)$,
- $x(t)$ возрастает на интервалах $(0; 1)$, $(1; 2)$,
- $t = 2$ — строгий локальный максимум, $x(2) = -1$,
- $t = 0$ — строгий локальный минимум, $x(0) = 0$.



$$y'(t) = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}$$

- $y(t)$ убывает на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; \frac{3}{2})$,
- $y(t)$ возрастает на интервале $(\frac{3}{2}; +\infty)$,
- $t = \frac{3}{2}$ — строгий локальный минимум, $y(\frac{3}{2}) = \frac{27}{32}$.



с) Асимптоты функций $x(t)$ и $y(t)$.

$$x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$$

$\lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} x(t) = \mp \infty \Rightarrow t = 1$ — вертикальная асимптота,

$$k = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{x(t)}{t} = -\frac{1}{4}, l = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} (x(t) - kt) = -\frac{1}{4}, \text{ следовательно, } x = -\frac{1}{4}(t+1) —$$

наклонная асимптота при $t \rightarrow \pm \infty$.

$$y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$$

$\lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} y(t) = \pm \infty \Rightarrow t = 1$ — вертикальная асимптота,

$$k = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{y(t)}{t} = \infty, \text{ следовательно, нет наклонной асимптоты при } t \rightarrow \pm \infty.$$

Исходя из исследования, строим графики координатных функций $x(t)$ и $y(t)$.

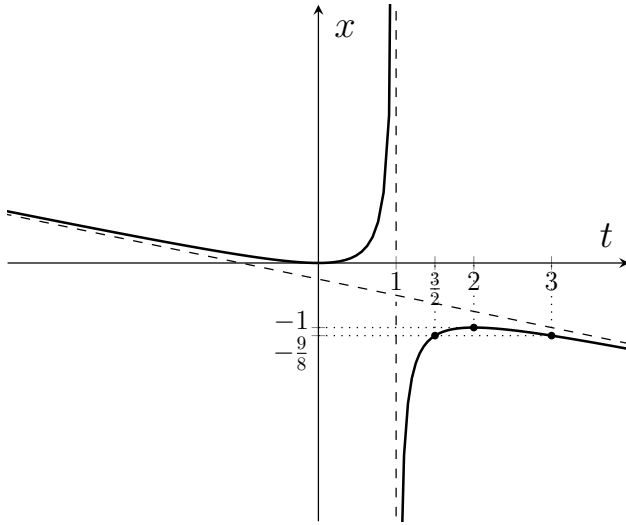


Рис. 1.

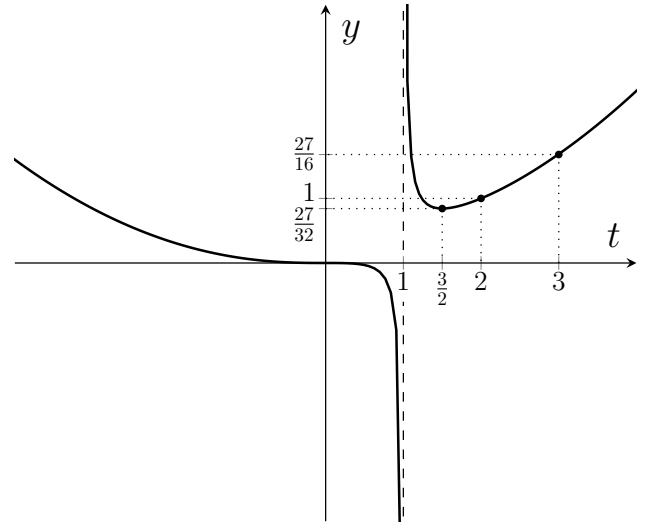
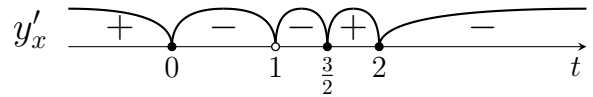


Рис. 2.

Необходимость построения некоторых дополнительных точек будет ясна из дальнейшего рассмотрения первой и второй производной функции, заданной параметрически.

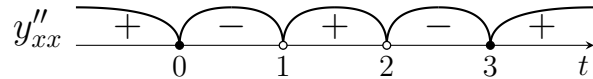
2) Определяем знаки первой производной функции, заданной параметрически.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2t-3)}{2(2-t)}$$



3) Определяем знаки второй производной функции, заданной параметрически.

$$y''_{xx} = \frac{4(t-1)^3(3-t)}{(2-t)^3t}$$



4) Находим асимптоты функции, заданной параметрически.

Ищем значения t_0 при стремлении к которым хотя бы одна из координатных функций $x(t)$ или $y(t)$ стремится к бесконечности. В данном случае это только $t_0 = 1$ или $t_0 = \infty$.

а) $t_0 = 1$.

Так как $\lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} x(t) = \infty$ и $\lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} y(t) = \infty$, то асимптота может быть только наклонной (если существует).

$$k = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} \frac{-t}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$l = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} \left(\frac{t^3}{8(t-1)} - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{t^2}{4(1-t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} \frac{t^2}{8} = \frac{1}{8}$$

Так как k и l существуют и конечны, то $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ — наклонная асимптота. Проанализируем взаимное положение графика функции и графика асимптоты. $y(t) - kx(t) - l = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(t^2 - 1)$. Эта разность положительна при $|t| > 1$, следовательно, график функции лежит выше асимптоты. Разность отрицательна при $t \in (-1; 1)$, и значит, при таких t график функции лежит ниже асимптоты.

б) $t_0 = \infty$

Так как $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \infty$, то асимптота может быть только наклонной (если существует). $k = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{-t}{2} = \mp\infty$. Этот предел бесконечен, следовательно асимптоты не существует.

5) Определяем функции от переменной x , объединение графиков которых, даёт график функции, заданной параметрически.

Функцию, заданную параметрически, можно представить в виде однозначных функций на интервалах, на которых производная $x'(t)$ имеет постоянный знак. В данном случае, таких интервалов четыре: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; \infty)$.

Для каждого случая построим график:

а) $t \in (-\infty; 0]$

Обозначим за $y = f_1(x)$ функцию, соответствующую промежутку $(-\infty; 0]$.

Используя графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (пункт 1), получаем, что $x \in [0; +\infty)$, $y \in [0; +\infty)$. Если $x \rightarrow +\infty$, то $t \rightarrow -\infty$, и следовательно, $y \rightarrow +\infty$. Если $x = 0$, то $t = 0$, а значит $y = 0$. Таким образом, $f_1(0) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

По пункту 2 первая производная $y'_x > 0$ при $t \in (-\infty; 0)$, а по пункту 3 вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно, функция $y = f_1(x)$ возрастает и выпукла

вниз на интервале $x \in (0; +\infty)$.

Заметим также, что $\lim_{x \rightarrow +0} f'_1(x) = \lim_{t \rightarrow -0} y'_x(x(t)) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{t(2t-3)}{2(2-t)} = 0$, то есть касательная к графику функции в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Ox .

Как будет видно из построения, при $t = 0$ график будет иметь «односторонние» касательные.

Итак $y = f_1(x)$ (Рис. 3)

- возрастает и выпукла вниз на промежутке $x \in [0; +\infty)$,
 - предел при $x \rightarrow +\infty$ равен $+\infty$, а $f_1(0) = 0$
 - касательная (односторонняя) к графику в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Oy .
- б) $t \in [0; 1)$

Обозначим за $y = f_2(x)$ функцию, соответствующую промежутку $[0; 1)$.

Используя графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (пункт 1), получаем, что $x \in [0; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0]$. Если $x \rightarrow +\infty$, то $t \rightarrow 1 - 0$, следовательно, по пункту 4, прямая $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ будет асимптотой $y = f_2(x)$ (график функции ниже асимптоты). Если $x = 0$, то $t = 0$, а тогда $y = 0$. Таким образом, $f_2(0) = 0$.

По пункту 2 первая производная $y'_x < 0$ при $t \in (0; 1)$, а по пункту 3 вторая производная $y''_{xx} < 0$. Следовательно, функция $y = f_2(x)$ убывает и выпукла вверх на интервале $x \in (0; +\infty)$.

Заметим также, что $\lim_{x \rightarrow +0} f'_2(x) = \lim_{t \rightarrow +0} y'_x(x(t)) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t(2t-3)}{2(2-t)} = 0$, то есть, касательная к графику функции в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Ox .

Итак $y = f_2(x)$ (Рис. 4)

- убывает и выпукла вверх на промежутке $x \in [0; +\infty)$,
- $f_2(0) = 0$,
- при $x \rightarrow +\infty$ имеет асимптоту $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$,
- касательная (односторонняя) к графику в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Oy .

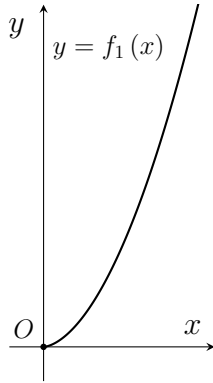


Рис. 3.

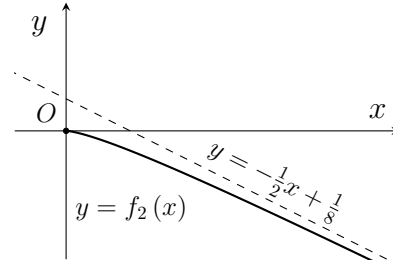


Рис. 4.

в) $t \in (1; 2]$

Обозначим за $y = f_3(x)$ функцию, соответствующую промежутку $(1; 2]$.

Тогда $x \in (-\infty; -1]$, $y \in [\frac{27}{32}; +\infty)$. Если $x \rightarrow -\infty$, то $t \rightarrow 1 + 0$ и следовательно, по пункту 4, прямая $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ будет асимптотой $y = f_3(x)$ (график функции выше асимптоты). Если $x = -1$, то $t = 2$, а $y = 1$. Следовательно, $f_3(-1) = 1$.

Производная $y'_x < 0$ при $t \in (1; \frac{3}{2})$. Тогда $x \in (-\infty; -\frac{9}{8})$, и значит, $f_3(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -\frac{9}{8}]$. Аналогично, производная $y'_x > 0$ при $t \in (\frac{3}{2}; 2)$. Тогда $x \in (-\frac{9}{8}; -1)$, и значит, $f_3(x)$ возрастает на промежутке $[-\frac{9}{8}; -1]$. При $t = \frac{3}{2}$ получаем, что $x = -\frac{9}{8}$, $y = \frac{27}{32}$, то есть $f_3(-\frac{9}{8}) = \frac{27}{32}$. График проходит через $A(-\frac{9}{8}; \frac{27}{32})$.

Вторая производная $y''_{xx} > 0$. Следовательно функция $y = f_3(x)$ выпукла вниз на промежутке $x \in (-\infty; -1]$.

Заметим также, что $\lim_{x \rightarrow -1-0} f'_3(x) = \lim_{t \rightarrow 2-0} y'_x(x(t)) = \lim_{t \rightarrow 2-0} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim_{t \rightarrow 2-0} \frac{t(2t-3)}{2(2-t)} = +\infty$, то есть, касательная к графику функции в точке $B(-1; 1)$ параллельна оси Oy . Так как при $t = \frac{3}{2}$ производная $y'_x = 0$, то касательная к графику функции в точке $A(-\frac{9}{8}; \frac{27}{32})$ параллельна оси Ox .

Итак $y = f_3(x)$ (Рис. 5)

- убывает и выпукла вниз на интервале $x \in (-\infty; -\frac{9}{8}]$,
- возрастает и выпукла вниз на промежутке $x \in [-\frac{9}{8}; -1]$,
- $f_3(-1) = 1$, $f_3(-\frac{9}{8}) = \frac{27}{32}$,
- при $x \rightarrow -\infty$ имеет асимптоту $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$,
- касательная в точке $B(-1; 1)$ параллельна оси Oy ,
- касательная в точке $A(-\frac{9}{8}; \frac{27}{32})$ параллельна оси Ox .

г) $t \in [2; +\infty)$

Обозначим за $y = f_4(x)$ функцию, соответствующую промежутку $[2; +\infty)$.

Тогда $x \in (-\infty; -1]$, $y \in [1; +\infty)$. Если $x \rightarrow -\infty$, то $t \rightarrow +\infty$ а $y \rightarrow +\infty$. Если $x = -1$, то $t = 2$, а тогда $y = 1$. Таким образом, $f_4(-1) = 1$.

Производная $y'_x < 0$ при $t \in (2; +\infty)$. Тогда $x \in (-\infty; -1)$, и значит, $f_4(x)$ убывает на интервале $(-\infty; -1)$.

Вторая производная $y''_{xx} > 0$, если $t \in (3; +\infty)$. При таких t $x \in (-\infty; -\frac{9}{8})$, и поэтому $y = f_4(x)$ выпукла вниз на промежутке $(-\infty; -\frac{9}{8}]$. $y''_{xx} < 0$, если $t \in (2; 3)$. При таких t $x \in (-\frac{9}{8}; -1)$, и поэтому, $y = f_4(x)$ выпукла вверх на промежутке $[-\frac{9}{8}; -1]$. Если $x = -\frac{9}{8}$, то $t = 3$ и $y = \frac{27}{16}$. Точка $C(-\frac{9}{8}; \frac{27}{16})$ является точкой перегиба графика функции.

$\lim_{x \rightarrow -1-0} f'_4(x) = \lim_{t \rightarrow 2+0} y'_x(x(t)) = \lim_{t \rightarrow 2+0} \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \lim_{t \rightarrow 2+0} \frac{t(2t-3)}{2(2-t)} = -\infty$, то есть, касательная к графику функции в точке $B(-1; 1)$ параллельна оси Oy .

Итак $y = f_4(x)$ (Рис. 6)

- убывает и выпукла вниз на промежутке $x \in (-\infty; -\frac{9}{8}]$,
- убывает и выпукла вверх на промежутке $x \in [-\frac{9}{8}; -1]$,
- предел при $x \rightarrow -\infty$ равен $+\infty$, а $f_4(-\frac{9}{8}) = \frac{27}{16}$,
- $C(-\frac{9}{8}; \frac{27}{16})$ — точкой перегиба,
- касательная в точке $B(-1; 1)$ параллельна оси Oy .

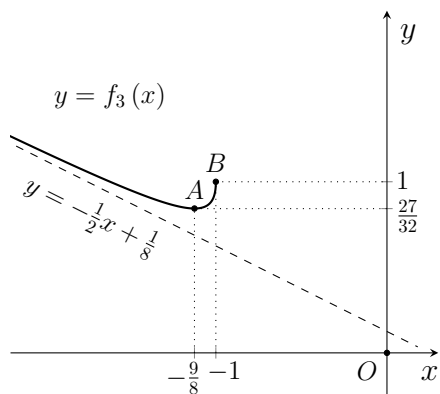


Рис. 5.

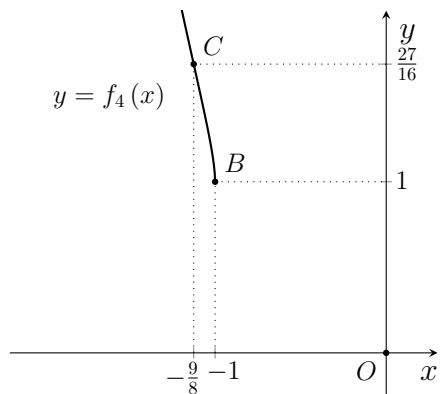


Рис. 6.

Объединяя графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$, получаем график исходной функции (Рис. 7):

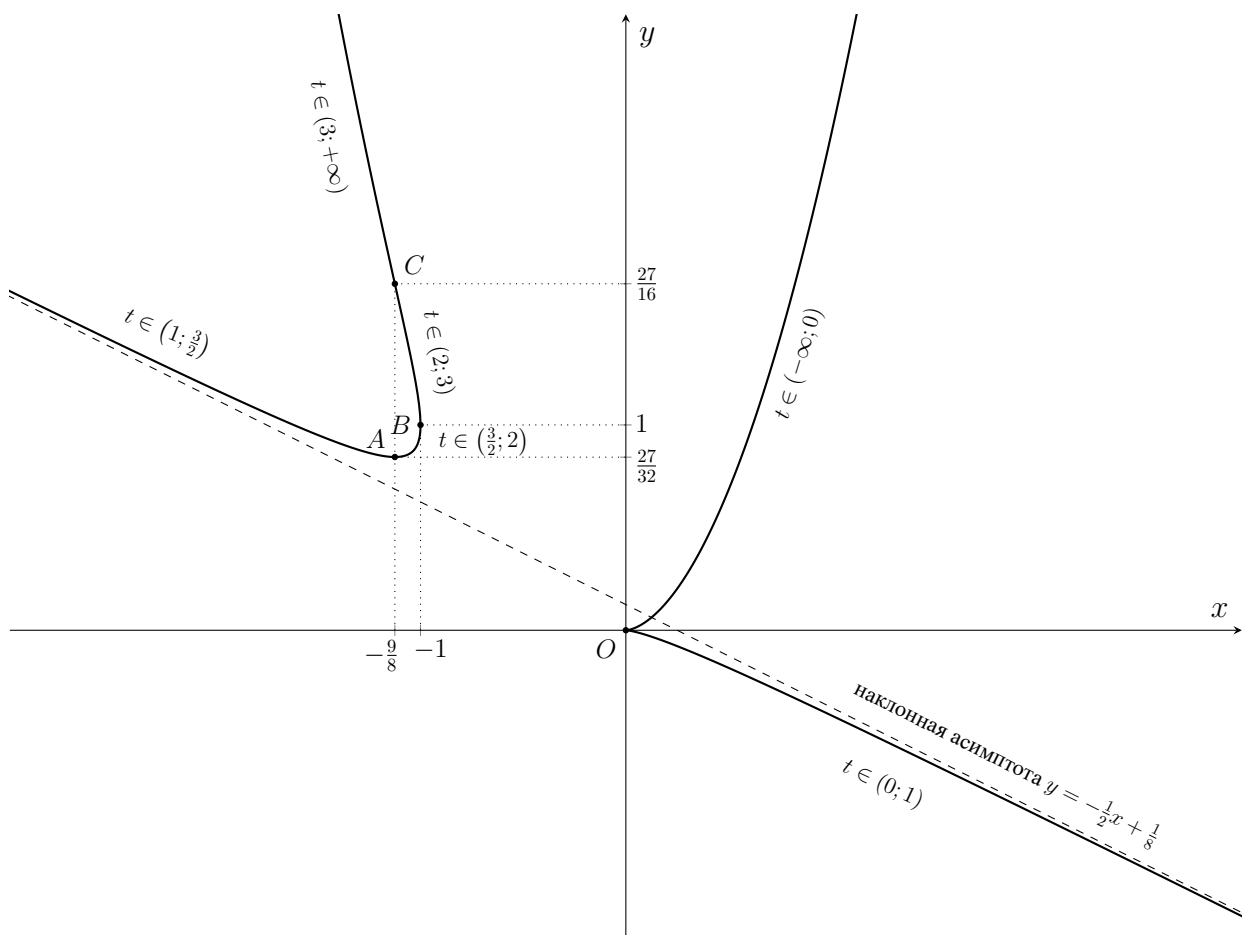


Рис. 7.

Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.