



ПОЛИТЕХ

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Тема № 04. Приложение производной к векторному
анализу

Лекция № 11. Вектор-функции

Учебные вопросы:

1. Определение вектор-функции
2. Предел и непрерывность вектор-функции
3. Производная вектор-функции, её свойства, производные старших порядков
4. Дифференцируемость вектор-функции

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4.
2. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.
3. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. -4 изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015444 с.ISBN 978-5-9221-1585-8.

1. Вектор-функции

В этом параграфе в обзорном порядке распространим понятия теории пределов и дифференциального исчисления со скалярных функций (вещественнозначных) на функции со значениями во множестве векторов. Обозначим за $\mathbf{V}$ множество векторов в пространстве (на плоскости).

Определение 1. *Отображение $\vec{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{V}$ называется вектор-функцией на промежутке $\langle a, b \rangle$ со значениями во множестве $\mathbf{V}$.*

Во множестве $\mathbf{V}$ берется ортогональный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (для трехмерного случая, $(\vec{i}, \vec{j})$ — для двумерного). Тогда $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ зависят от t , то есть являются функциями. Их называют координатными функциями вектор-функции $\vec{r}(t)$. Для краткости, отождествив вектор и строку его координат, будем записывать $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Пример 1 (случай плоскости). Вектор-функцию

$$\vec{r}(t) = R \cos t \cdot \vec{i} + R \sin t \cdot \vec{j}, \quad x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t$$

можно записать как

$$\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t),$$

так и

$$\vec{r} : \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$$

Определение 2. *Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, а вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в проколо-*

той окрестности точки t_0 . $\vec{\mathbf{A}} \in \mathbf{V}$ называют пределом вектор-функции $\vec{\mathbf{r}}(t)$ при стремлении t к t_0 и обозначают $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{A}}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \left(\forall t : 0 < |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{A}} \right| < \varepsilon \right). \quad (1)$$

Это определение дословно переносится со случая функции с заменой модуля в последнем неравенстве на длину вектора.

Упражнение 1. Дать определение одностороннего предела вектор-функции.

Упражнение 2. Дать определение предела вектор-функции, если $t_0 = +\infty$, $t_0 = -\infty$, $t_0 = \infty$, а также бесконечно большой вектор-функции.

Утверждение 1. $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{A}} \right| = 0$

► Немедленно следует из определения. ◀

Замечание 1. Это утверждение сводит предел вектор-функции к пределу функции.

Теорема 1 (О покоординатном пределе). Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathbf{A}} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbf{V}$, вектор-функция $\vec{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ определена в проколотой окрестности точки t_0 . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = A_x \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = A_y \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = A_z \end{cases}. \quad (2)$$

► Докажем необходимость

$$\begin{aligned} 0 \leq |x(t) - A_x| &= \sqrt{(x(t) - A_x)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x(t) - A_x)^2 + (y(t) - A_y)^2 + (z(t) - A_z)^2} = \\ &= |\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{A}}| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = A_x$. Аналогично $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = A_y$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = A_z$.

Докажем достаточность

$$|\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{A}}| = \sqrt{(x(t) - A_x)^2 + (y(t) - A_y)^2 + (z(t) - A_z)^2} \rightarrow 0.$$



Теорема 2 (Свойства предела). *Функция $f(t)$, вектор-функции $\vec{\mathbf{r}}(t)$ и $\vec{\mathbf{p}}(t)$ определены в проколотой окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ и имеют конечные пределы при $t \rightarrow t_0$. Тогда*

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot \vec{\mathbf{r}}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t),$
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{\mathbf{r}}(t) + \vec{\mathbf{p}}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{p}}(t),$
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{\mathbf{r}}(t) \cdot \vec{\mathbf{p}}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{p}}(t),$
4. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{\mathbf{r}}(t) \times \vec{\mathbf{p}}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{r}}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\mathbf{p}}(t).$

► Докажем свойства (2) и (4). Остальные доказываются аналогично. Обозначим

$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{p}(t) = \vec{b}$. При $t \rightarrow 0$

$$\left| (\vec{r}(t) + \vec{p}(t)) - (\vec{a} + \vec{b}) \right| \leq |\vec{r}(t) - \vec{a}| + |\vec{p}(t) - \vec{b}| \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}(t) + \vec{p}(t)) = \vec{a} + \vec{b}.$$

Этим доказан пункт (2).

$$\begin{aligned} \left| \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) - \vec{a} \times \vec{b} \right| &= \left| (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t) - \vec{a} \times \vec{p}(t)) + (\vec{a} \times \vec{p}(t) - \vec{a} \times \vec{b}) \right| \leq \\ &\leq |\vec{r}(t) - \vec{a}| \cdot |\vec{p}(t)| + |\vec{a}| \cdot |\vec{p}(t) - \vec{b}| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поскольку скалярная функция $|\vec{p}(t)|$ имеет конечный предел, а потому ограничена в некоторой проколотой окрестности точки t_0 . Следовательно, $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) = \vec{a} \times \vec{b}$. Пункт (4) доказан. ◀

Определение 3. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, вектор-функция $\vec{r}(t)$ и функция $f(t)$ определены в проколотой окрестности t_0 , функция $f(t) \neq 0$ для любого t из этой окрестности. Если $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t)}{f(t)} = \vec{0}$, то $\vec{r}(t)$ называют «о» малое от функции $f(t)$ при t стремящемся к t_0 и обозначают $\vec{r}(t) = \vec{o}(f(t))$ при $t \rightarrow t_0$.

Утверждение 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ отличны от нуля в некоторой проколотой окрестности точки t_0 . Тогда при $t \rightarrow t_0$

1. $\vec{o}(f) \pm \vec{o}(f) = \vec{o}(f)$,
2. $\vec{o}(f) \cdot \vec{o}(g) = o(f \cdot g)$,
3. $\vec{o}(f) \times \vec{o}(g) = \vec{o}(f \cdot g)$,
4. f — ограничена в проколотой окрестности точки $t_0 \Rightarrow f \cdot \vec{o}(g) = \vec{o}(g)$,

5. $\vec{r}(t)$ — ограничена в проколотой окрестности точки $t_0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{o}(g) = o(g)$,

6. $\vec{r}(t)$ — ограничена в проколотой окрестности точки $t_0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{o}(g) = \vec{o}(g)$.

► Доказательства аналогично скалярному случаю. ◀

Определение 4. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в промежутке $\langle a; b \rangle$, $t_0 \in \langle a; b \rangle$. Тогда вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0 , если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Определение 5. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной на промежутке $\langle a; b \rangle$, если она непрерывна в любой точке этого промежутка.

Теорема 3 (Свойства непрерывной вектор-функции). Функция $f(t)$, вектор-функции $\vec{r}(t)$ и $\vec{p}(t)$ непрерывны в точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда непрерывны в точке $t_0 \in \mathbb{R}$ вектор-функции: $f(t) \cdot \vec{r}(t)$, $\vec{r}(t) + \vec{p}(t)$, $\vec{r}(t) \cdot \vec{p}(t)$, $\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$.

► Следует из свойств предела и определения непрерывности. ◀

Теорема 4 (О покоординатной непрерывности). Пусть вектор-функция $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ определена в окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $\vec{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывны в точке t_0 .

► Следует из теоремы о покоординатном пределе. ◀

Определение 6. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 . Если существует конечный предел $\vec{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$, то этот предел называется производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 .

Замечание 2. Другое обозначение: $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{r}'(t)$.

Замечание 3. Если $\Delta t = t - t_0$, то $\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$.

Определение 7. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 . Если существует $\vec{A} \in \mathbf{V}$ такое, что при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{A} \cdot \Delta t + \vec{o}(\Delta t), \quad (3)$$

то вектор-функцию $\vec{r}(t)$ называют дифференцируемой в точке t_0 , а $\vec{A} \cdot \Delta t$ называют дифференциалом $\vec{r}(t)$ в точке t_0 и обозначают $d\vec{r}(t_0)$.

Теорема 5 (Критерий дифференцируемости). Вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 . Тогда

$\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \Leftrightarrow$ существует (конечная) производная $\dot{\vec{r}}(t_0)$.
В случае дифференцируемости $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{A}$, где $\vec{A}$ — постоянный вектор из определения дифференцируемости.

► Дословно повторяет доказательства скалярного случая. ◀

Замечание 4. $d\vec{r}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0) \cdot dt$.

Теорема 6 (О покомпонентной дифференцируемости). Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, вектор-функция $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ определена в окрестности точки t_0 . Тогда $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда функции $x(t), y(t), z(t)$ дифференцируемы в точке t_0 . В случае дифференцируемости

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \quad (4)$$

► Следует из теоремы о покомпонентном пределе и определения производной. ◀

Определение 8. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется дифференцируемой на интервале (a, b) , если $\vec{r}(t)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b) .

Теорема 7. Пусть $c \in \mathbb{R}$, функция $f(t)$ и вектор-функции $\vec{r}(t)$, $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ дифференцируемы в точке t_0 . Тогда в точке t_0

1. $(c \cdot \vec{r}(t))' = c \cdot \vec{r}'(t)$,
2. $(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$,
3. $(f(t) \cdot \vec{r}(t))' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r}'(t)$,
4. $(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t)$,
5. $(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$.

► Равенства (1) и (2) доказываются так же как в скалярном случае, а (3), (4) и (5) доказываются схожим образом. Докажем только пятое равенство. Обозначим $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)$.

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2(t_0)}{t - t_0}.$$

Добавляя и вычитая $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t_0)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t_0) - \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2(t_0)}{t - t_0}, \\ \vec{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}_1(t) \times (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(t_0))}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t_0)) \times \vec{r}_2(t_0)}{t - t_0}, \\ \vec{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(t_0))}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t_0))}{t - t_0} \times \vec{r}_2(t_0). \end{aligned}$$

Учитывая определение производной и непрерывность дифференцируемой вектор-функции, получаем $\vec{r}'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2'(t_0)$. ◀

Если вектор $\vec{r}(t)$ откладывать от начала координат, то $\dot{\vec{r}}(t_0)$ — касательный вектор к кривой, образованной концом вектора $\vec{r}(t)$ при изменении t в точке, яв-

ляющейся концом вектора $\vec{r}(t_0)$ (Рис. 1). Зная векторное уравнение прямой по направляющему вектору и точке, получаем уравнение касательной прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0) \cdot (t - t_0). \quad (5)$$

С физической точки зрения, $\dot{\vec{r}}(t)$ — скорость перемещения точки по кривой (траектория точки), образованной концом вектора $\vec{r}(t)$ при изменении времени t .

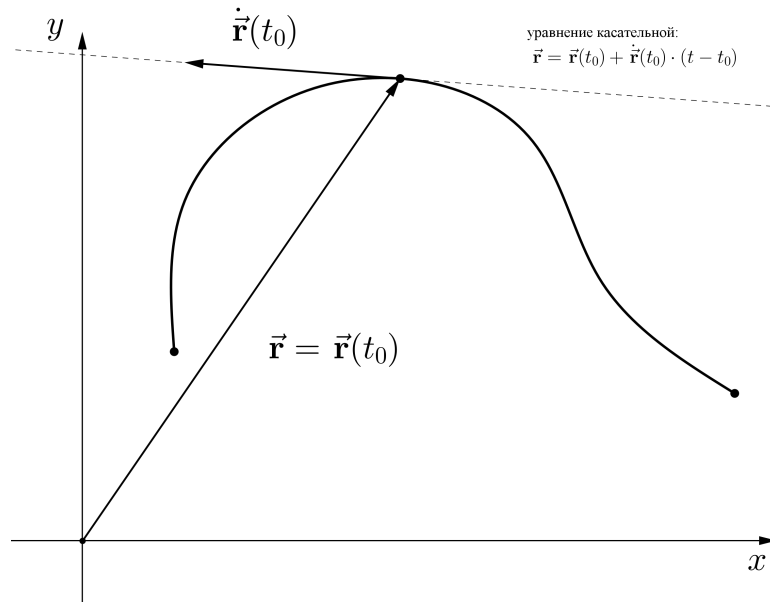


Рис. 1. Геометрический смысл производной вектор-функции

Определение 9. Положим $\vec{r}^{(0)}(t) = \vec{r}(t)$ — производная нулевого порядка. Тогда индуктивно полагаем, что

$$\vec{r}^{(n)}(t_0) = \left(\vec{r}^{(n-1)} \right)'(t_0). \quad (6)$$

Если у вектор-функции есть n производных в точке t_0 , то $\vec{r}(t)$ называется n раз дифференцируемой в точке t_0 .

Утверждение 3. Пусть вектор-функции $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ n раз дифференцируемы в точке t_0 , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда линейная комбинация $\alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t)$ — n раз

дифференцируема в точке t_0 и

$$(\alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t))^{(n)} = \alpha \cdot \vec{r}_1^{(n)}(t) + \beta \cdot \vec{r}_2^{(n)}(t). \quad (7)$$

Утверждение 4. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогда $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ n раз дифференцируемы в точке t_0 . В этом случае

$$\vec{r}^{(n)}(t) = \left(x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t) \right). \quad (8)$$

Теорема 8. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема в точке t_0 , тогда при $t \rightarrow t_0$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\vec{r}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{\vec{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \vec{o}((t - t_0)^n). \end{aligned} \quad (9)$$

► Следует из предыдущего утверждения и разложения координатных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано при $t \rightarrow t_0$. ◀

Разработал старший преподаватель
кафедры высшей математики Одинцов А.В.