ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 02. Вещественные числа

Лекция № 03. Вещественные числа. Аксиома полноты

Учебные вопросы:

1. Общие свойства множества вещественных чисел
2. Промежутки
3. Абсолютная величина (модуль) вещественного числа
4. Геометрическая интерпретация

Литература


1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

## 1. Общие свойства множества вещественных чисел

Будем исходить из представлений и опыта работы с числами, которые у нас сложились в школе.

Множество вещественных чисел обозначим через $\mathbb{R}$. Сейчас мы перечислим основные свойства — аксиомы множества вещественных чисел. Большая их часть нам хорошо знакома. Исключение составит свойство полноты, которое следует рассмотреть с особым вниманием.

I. На множестве вещественных чисел определена операция сложения. К основным свойствам сложения отнесем:

1) Коммутативность.

2) Ассоциативность.

3) Существование нейтрального элемента $(0)$.

4) Существование противоположного элемента.

II. На множестве вещественных чисел определена операция умножения. К основным свойствам сложения отнесем:

1) Коммутативность.

2) Ассоциативность.

3) Существование нейтрального элемента $(1 \neq 0)$.

4) Существование обратного элемента.

III. Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности:

$$(x + y)z = xz + yz\,. \qquad (1)$$

### IV. На множестве вещественных чисел определено отношение порядка $\leq$.

*Порядком* называется отношение с тремя свойствами:

$$\begin{aligned} &x \leq x, \\ &x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y, \\ &x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z. \end{aligned} \tag{2}$$

Отношение порядка на $\mathbb{R}$ является *линейным порядком*:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \vee y \leq x\,. \tag{3}$$

### V. Связь арифметических операций и порядка

$$\begin{aligned} &x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ &x,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

### VI. Аксиома полноты

Пусть $X, Y$ — непустые множества вещественных чисел, причем

$$\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \leq y\,. \tag{5}$$

Тогда $$\exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \leq c \leq y \tag{6}$$

Определение. $X$ —непустое множество вещественных чисел.

Число $M$ называется *верхней границей* множества $X$, если

$$\forall x \in X \;\; x \leq M\,. \tag{6}$$

Число $m$ называется *нижней границей* множества $X$, если

$$\forall x \in X \;\; x \geq m\,. \tag{8}$$

Множество, имеющее верхнюю границу, называется *ограниченным сверху*.

Множество, имеющее нижнюю границу, называется *ограниченным снизу*.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Теорема 1. Существование точных граней

1) Пусть множество $E$ ограничено сверху. Тогда среди верхних границ множества $E$ существует наименьшая.

2) Пусть множество $E$ ограничено снизу. Тогда среди нижних границ множества $E$ существует наибольшая.

▶Пусть $E^s \neq \varnothing$ — множество верхних границ множества $E$ . Ясно, что

$$\forall x \in E \ \forall y \in E^s \ \ x \le y .$$

По аксиоме полноты

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in E \ \forall y \in E^s \ \ x \le M \le y .$$

Неравенство $x \le M$ означает, что $M$ — верхняя граница множества $E$, а неравенство $M \le y$ означает, что $E$ — наименьшая верхняя граница. ◀

Определение. 1) Пусть $E$ — ограниченное сверху множество вещественных чисел. Наименьшая верхняя граница множества $E$ называется *точной верхней границей, точной верхней гранью* и обозначается

$$\sup E = \sup_{x \in E} x . \tag{9}$$

2) Пусть $E$ — ограниченное снизу множество вещественных чисел. Наибольшая нижняя граница множества $E$ называется *точной нижней границей, точной нижней гранью* и обозначается

$$\inf E = \inf_{x \in E} x . \tag{10}$$

Теорема 2. Описание точных граней на $\varepsilon$-языке.

$$1) \ M = \sup E \ \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall x \in E \ x \le M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ x > M - \varepsilon \end{matrix} . \tag{11}$$

$$2) \ m = \inf E \ \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall x \in E \ x \ge m \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ x < m + \varepsilon \end{matrix} . \tag{12}$$

Предложение.

1) *Если* $A \subset B$ , $B$ *ограничено сверху, то* $A$ *ограничено сверху и*

$$\sup A \le \sup B .$$

2) $\sup\left(A + x\right) = \sup A + x$ (*здесь* $A + x = \left\{ y + x \middle| y \in A \right\}$).

3) *Если* $\lambda > 0$, *то* $\sup \lambda A = \lambda \sup A$; $\sup(-A) = -\inf A$ (*здесь* $\lambda A = \{\lambda x | x \in A\}$).

Пример. $\sup(0, 1) = 1$

Если $z = \sup E \in E$, то $z = \max E$ — наибольший элемент множества $E$. Если $z = \max E$, то $z = \sup E$.

## 2. Промежутки

К промежуткам относят множества вещественных чисел следующих типов:

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\} \text{ — } \textit{отрезок} \text{ (здесь } a \le b),$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \text{ — } \textit{интервал} \text{ (здесь } a < b),$$

$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\} \text{ (здесь } a < b),$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\} \text{ (здесь } a < b),$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \ge a\} \text{ — замкнутый луч,}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\} \text{ открытый луч,}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\} \text{ — замкнутый луч,}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \text{ открытый луч,}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Промежуток $\Delta$ характеризуется тем свойством, что

$$\forall x, y \in \Delta \quad x < z < y \Rightarrow z \in \Delta.$$

## 3. Абсолютная величина (модуль) вещественного числа

### $1^0$. Определение.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

### $2^0$ Основные свойства:

$$1)\ |x| = \max\{x, -x\},$$

$$2)\ |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$3)\ |-x| = |x|,$$

$$4)\ |xy| = |x||y|,$$

$$5)\ -|x| \leq x \leq |x|,$$

$$6)\ a > 0 \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,$$

$$7)\ |x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$8)\ |x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

Предложение. *Множество* $E \subset \mathbb{R}$ *ограничено в том и только в том случае, если*

$$\exists M\ \forall x \in E\ |x| \leq M. \tag{2}$$

## 4. Геометрическая интерпретация

Рассмотрим прямую $l$, выберем на ней точку $O$, которую будем называть *началом отсчета* и считать изображением числа $0$, точку $E$ для изображения числа $1$. Направление от $O$ к $E$ назовем положительным и отметим стрелкой (рис. 1). Отрезок

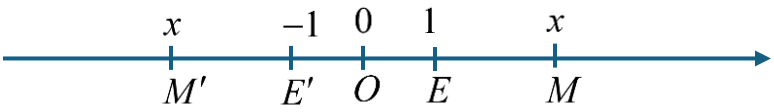


Рис. 1

$OE$ — *масштабный отрезок*, его длина считается равной единице. Каждому положительному числу $x$ ставим в соответствие точку $M$, находящуюся на луче $OE$ на расстоянии $x$ от начала отсчета $O$. Отрицательному числу $(-x)$ ставим в соответствие точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно начала отсчета $O$. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел и точками прямой $l$. Прямую $l$ будем называть *числовой прямой* или *числовой осью.* В дальнейшем мы часто будем отождествлять числа и изображающие их точки, называть вещественные числа точками.

**Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.**