Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Лекция № 01. Неопределенный интеграл. Основные понятия.

Учебные вопросы:

1. Введение. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица простейших интегралов.

Литература

1. Аксенов А.П. Математика. Математический анализ. Ч. 1: Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2009.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. М., Физматлит, 2015. 444 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов – ЭБС «Айбукс.ру/ ibooks.ru». М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

1. Введение. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.

Вспомним, что первым шагом в дифференциальном исчислении было решение задачи об отыскании по заданной функции ее производной или дифференциала.

Однако во многих вопросах математического анализа и его приложений приходится не по заданной функции искать ее производную или дифференциал, а наоборот – восстанавливать функцию по известной ее производной или по известному ее дифференциалу. В частности, такая необходимость возникает при решении дифференциальных уравнений, входящих в математические модели большинства прикладных задач в физике и технике, а также при вычислении определенных интегралов, с помощью которых находят площади, объемы, координаты центра масс, моменты инерции, силы, давления, и ряд других физических величин.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором конечном или бесконечном промежутке $\langle a,b\rangle$ (т. е. на открытом, полуоткрытом или замкнутом промежутке, причем если рассматриваемый промежуток является замкнутым, то он может быть только конечным).

Пусть функция $F(x)$ определена и непрерывна на этом же промежутке $\langle a,b\rangle$ и такая, что

$$F'(x)=f(x) \quad \text{для} \quad x\in(a,b). \tag{1}$$

Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$.

Связь между $f(x)$ и ее первообразной $F(x)$ может быть выражена и так:

$$dF(x)=f(x)dx, \quad x\in(a,b). \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения:

I. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке $\langle a,b\rangle$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, тоже первообразная для $f(x)$ в $\langle a,b\rangle$.

▶ Действительно, имеем:

1) $F(x)+C$ определена и непрерывна на $\langle a,b\rangle$, и

2) $(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x)$, $x\in(a,b)$. ◀

II. Любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$ содержится во множестве

$$\{F(x)+C\}, \quad x\in\langle a,b\rangle. \tag{3}$$

▶ В самом деле, пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$, а $\Phi(x)$ – любая другая первообразная для $f(x)$, на $\langle a,b\rangle$. Имеем, по определению:

1) $F(x)$ и $\Phi(x)$ определены и непрерывны на промежутке $\langle a,b\rangle$;

2) $F'(x)=f(x)$ и $\Phi'(x)=f(x)$ для $x\in(a,b)$.

Видим, что $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеют в (a,b) совпадающие производные. Но тогда эти функции в промежутке $\langle a,b\rangle$ отличаются друг от друга на постоянную величину, т. е.

$$\Phi(x) - F(x) = C \text{ (const)}, \ x \in \langle a,b\rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = F(x) + C, \ x \in \langle a,b\rangle .$$

Видим, что $\Phi(x)$ получается из (3) надлежащим выбором постоянной C. ◄

Пример.

Графики функций (рис.1) $F(x)=x^2+3$ и $\Phi(x)=x^2-1$ отличаются сдвигом на const. Для каждого значения x производные совпадают – углы наклона двух графиков – одинаковы:

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

(Например, при $x = -1$ тангенс угла наклона равен –2).

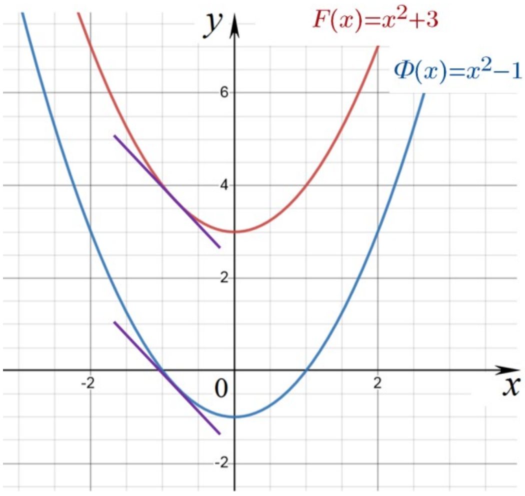

рис.1

Определение. Множество $\{F(x)+C\}$ всех первообразных функции $f(x)$, определенных на промежутке $\langle a,b\rangle$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается через

$$\int f(x)\,dx$$

Здесь символ $\int$ – знак интеграла,

$f(x)$ – *подынтегральная функция*,

$f(x)dx$ – *подынтегральное выражение*. (рис.2).

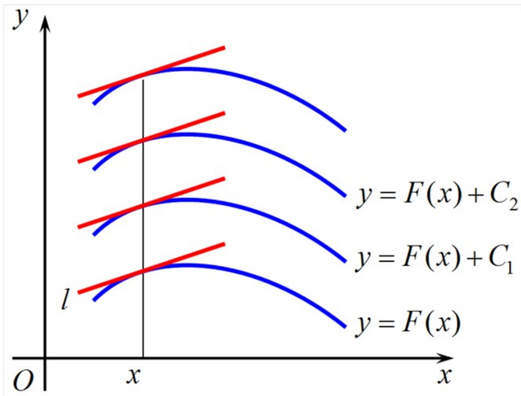

рис.2

Итак, по определению

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+C\}, \quad x \in \langle a,b\rangle . \tag{4}$$

Принято писать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad x \in \langle a,b\rangle . \qquad (5)$$

(Тем самым здесь под символом $\int f(x)\,dx$ понимают как все множество первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.)

Пример.

На рис.3 – множество первообразных функции

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

$$\int \left(3x^2 - 1\right) dx = x^3 - x + C$$

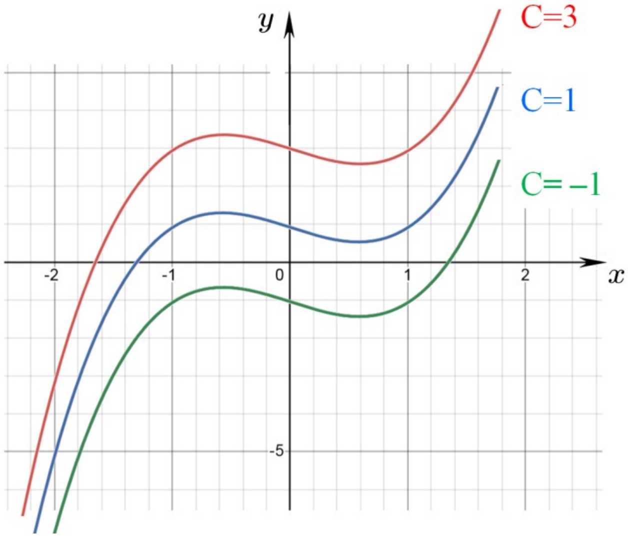

рис.3

Замечание 1. *Вопрос*: для всякой ли функции $f(x)$, определенной в промежутке $\langle a,b\rangle$, существует первообразная?

Оказывается, нет. Однако если $f(x)$ непрерывна, то первообразная всегда существует. Этот факт будет доказан позднее, а пока примем его без доказательства и всюду в данной главе будем говорить о первообразной непрерывной функции $f(x)$. Если же $f(x)$ оказывается разрывной, то о первообразной для нее будем говорить в том или ином промежутке ее непрерывности.

Замечание 2. Формула (5) показывает, что отыскание какой-нибудь одной определенной первообразной и отыскание неопределенного интеграла – задачи почти тождественные. Поэтому и то, и другое мы будем называть *интегрированием.*

Интегрирование представляет собой операцию, обратную операции дифференцирования. Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат интегрирования (дифференцирование должно дать подынтегральную функцию).

2. **Свойства неопределенного интеграла.**

1°. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$, $x \in (a,b)$. (В данной формуле под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимается любая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ в промежутке $\langle a,b\rangle$).

2°. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$, $x \in (a,b)$.

3°. $\int dF(x) = F(x) + C$, $x \in \langle a,b\rangle$.

4°. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют в промежутке $\langle a,b\rangle$ первообразные, то и функции $\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]$ имеют в $\langle a,b\rangle$ первообразные, причем

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx, \quad x \in \langle a,b\rangle. \tag{6}$$

(Равенство (7) следует понимать как равенство двух множеств.)

5°. Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $\langle a,b\rangle$ первообразную, то и функция $k f(x)$, где $k = \text{const} \neq 0$, имеет в $\langle a,b\rangle$ первообразную, причем

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx, \quad x \in \langle a,b\rangle. \tag{7}$$

(Равенство (8) следует понимать как равенство двух множеств.)

3. **Таблица простейших интегралов.**

Было отмечено (см. замечание 2), что интегрирование представляет собой операцию, обратную операции дифференцирования. Принимая во внимание это обстоятельство, можем составить таблицу ряда неопределенных интегралов, получающихся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций. (Каждая формула этой таблицы проверяется дифференцированием.)

1. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. $\int x^r dx=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$, $x\in(0,+\infty)$, где r – любое, не равное -1.

Замечание. Промежуток, в котором верна формула 2, зависит от конкретного значения r. Если число r таково, что x^r имеет смысл и для $x\le 0$, то формула 2 справедлива для $x\in(-\infty,+\infty)$.

Формула $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{1/2}dx=\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C$ верна для $x\in[0,+\infty)$.

Формула $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-1/2}dx=2\sqrt{x}+C$ верна для $x\in(0,+\infty)$.

Формула $\int\dfrac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=-\dfrac{1}{x}+C$ верна для $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3.1. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+C$, $x\in(0,+\infty)$.

3.2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, $x\in(-\infty,0)$.

Формулы 3.1 и 3.2 можно объединить в одну формулу:

3. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$ $(a>0,\ a\ne 1)$. В частности, $\int e^x dx=e^x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

5. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

6. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

7. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$ в любом промежутке, не содержащем точек $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

8. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$ в любом промежутке, не содержащем точек $x=\pi n$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

9. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

10. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$, $x \in (-1, 1)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + C$, $x \in (-1, 1)$.

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

16. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Разработал профессор

кафедры высшей математики

Халидов И.А.