

Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Лекция №02. Методы интегрирования.

Учебные вопросы:

1. Интегрирование методом подстановки.
2. Интегрирование по частям.
3. Приведение интеграла к самому себе.

Литература

1. Аксенов А.П. Математика. Математический анализ. Ч. 1: Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2004.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. М., Физматлит, 2015. 444 с.
3. Тер-Криков А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов – ЭБС «Айбукс.ру/ ibooks.ru». М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

1. Интегрирование методом подстановки.

Метод подстановки (или метод замены переменной) базируется на следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$ и имеет там первообразную $F(x)$ и, следовательно,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (1)$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$ и имеет на промежутке (α, β) непрерывную производную $\varphi'(t)$. Пусть, кроме того, функция $x = \varphi(t)$ такая, что для любого $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ оказывается: $\varphi(t) \in \langle a, b \rangle$. Тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, и поэтому

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (2)$$

► Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на промежутке $\langle a, b \rangle$. По условию, при

любом t из $\langle \alpha, \beta \rangle$ $\varphi(t) \in \langle a, b \rangle$. Следовательно, сложные функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$ определены на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$. Отметим, что эти сложные функции непрерывны на $\langle \alpha, \beta \rangle$ как суперпозиции непрерывных функций. По правилу дифференцирования сложных функций для всех $t \in (\alpha, \beta)$ будем иметь

$$(F(\varphi(t)))'_t = (F(\varphi(t)))'_x \cdot x'_t = f(x) \cdot x'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Вывод: Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$. ◀

Замечание. Формула (2) часто применяется на практике при вычислении интегралов. Для удобства ее применения придадим ей несколько другой вид. Заметив, что

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = (F(x) + C) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C,$$

перепишем формулу (2) в виде

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}. \quad (3)$$

Из (3) видим, что для вычисления интеграла $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ можно сначала вычислить интеграл $\int f(x) dx$, а затем вместо x подставить функцию $\varphi(t)$.

Заметим, что формулу (3) часто бывает целесообразно использовать в обратном порядке, т. е. справа налево. Именно, иногда бывает удобно вычисление интеграла $\int f(x) dx$ с помощью замены $x = \varphi(t)$ свести к вычислению интеграла

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

т. е. использовать формулу (3) в виде

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}, \quad (4)$$

где $\varphi^{-1}(x)$ обозначает функцию, обратную функции φ . Чтобы обратная функция

$\varphi^{-1}(x)$ существовала, нужно, в дополнение к условиям теоремы, потребовать, чтобы функция $x = \varphi(t)$ была строго монотонной на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$. В этом случае, как мы знаем, будет существовать однозначная обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$.

2. Интегрирование по частям.

1°. Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют конечные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на промежутке (a, b) . Пусть на промежутке $\langle a, b \rangle$ существует интеграл $\int v du$. Тогда на промежутке $\langle a, b \rangle$ существует интеграл $\int u dv$, причем

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5)$$

► Для $x \in (a, b)$ имеем

$$d(uv) = v du + u dv \Rightarrow u dv = d(uv) - v du.$$

Заметим, что интеграл от каждого слагаемого правой части последнего соотношения существует, ибо

$$\int d(uv) = uv + C, \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad (6)$$

а интеграл $\int v du$ существует по условию. Значит, по свойству неопределенных интегралов, рассмотренному на предыдущей лекции (под номером 4°), существует

на промежутке $\langle a, b \rangle$ и интеграл $\int u dv$, причем

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du. \quad (7)$$

Принимая во внимание соотношение (6) и относя произвольную постоянную C к интегралу $\int v du$, получим

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

а это и требовалось установить. ◀

Замечание 1. При вычислении интегралов с помощью формулы (1) не каждый способ выбора функций $u(x)$ и $v(x)$ приводит к интегралу более простому, чем первоначальный. Например, пусть требуется вычислить интеграл $\int x e^x dx$. Положим

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx, \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

Будем иметь $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$. Если же положить

$$\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x dx, \\ dv = x dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

то получим $\int x e^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$. Видим, что в этом случае интегрирование по частям привело к интегралу, более сложному, чем исходный.

Замечание 2. На практике всегда оказывается заданной левая часть соотношения (1), т. е. функция $u(x)$ и дифференциал dv , а поэтому функция $v(x)$ определяется неоднозначно. Обычно в качестве $v(x)$ выбирается функция, записываемая наиболее простой формулой.

Замечание 3. Часто для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Например, пусть требуется вычислить интеграл $I = \int (\arcsin x)^2 dx$. Имеем

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \left[\begin{array}{l} u = (\arcsin x)^2 \Rightarrow du = 2 \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] =$$

$$= x (\arcsin x)^2 - 2 \int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} u_1 = \arcsin x \Rightarrow du_1 = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv_1 = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v_1 = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] =$$

$$= x (\arcsin x)^2 - 2 \left[-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C.$$

3. Приведение интеграла к самому себе.

Иногда, применяя формулу интегрирования по частям к интегралу I , мы приходим снова к исходному интегралу. В этом случае полученное соотношение следует рассматривать как уравнение относительно I . Поясним это на следующих примерах.

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

► Имеем

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I$$

Итак, получили: $I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I$.

Ранее было отмечено, что всякое равенство такого вида представляет собой равенство между двумя множествами функций. Элементы каждого из этих множеств отличаются друг от друга на постоянную величину.

Рассматривая полученное соотношение как уравнение относительно I , находим

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$.

► Имеем

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{\alpha x} \Rightarrow du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \cos \beta x dx \Rightarrow v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \left[\begin{array}{l} u_1 = e^{\alpha x} \Rightarrow du_1 = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv_1 = \sin \beta x dx \Rightarrow v_1 = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I$$

Это равенство следует рассматривать как равенство между двумя множествами функций. Элементы каждого из этих множеств отличаются друг от друга на постоянную величину. Из полученного соотношения находим, следовательно,

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) + C$$

Замечание. Практика показывает, что значительная часть интегралов, берущихся посредством интегрирования по частям и приведения к себе, может быть разбита на следующие три группы:

1) К первой группе относятся интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $(\arcsin x)^2$, $(\arccos x)^2$, $(\operatorname{arctg} x)^2$, Для вычисления интегралов этой группы следует применять формулу $\int u dv = uv - \int v du$, полагая в ней $u(x)$ равной одной из указанных выше функций.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл $I = \int x^{\mu} \ln x dx$ ($\mu \neq -1$).

$$I = \int x^{\mu} \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{\mu} dx \Rightarrow v = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \end{array} \right] =$$

► Имеем

$$= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \ln x - \frac{1}{\mu+1} \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \left(\ln x - \frac{1}{\mu+1} \right) + C$$

В качестве примера вычислим еще интеграл $I = \int x \operatorname{arctg} x dx$.

► Имеем

$$\begin{aligned}
I = \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

2) Ко второй группе относятся интегралы вида $\int (ax+b)^n \cos(cx) dx$, $\int (ax+b)^n \sin(cx) dx$, $\int (ax+b)^n e^{cx} dx$, где a, b, c – некоторые постоянные, а $n \in \mathbb{N}$. Интегралы этой группы берутся путем n -кратного применения формулы интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ каждый раз следует брать $(ax+b)$ в соответствующей степени. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл $I = \int x^3 \sin x dx$.

► Имеем:

$$\begin{aligned}
I = \int x^3 \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} u_1 = x^2 \Rightarrow du_1 = 2x dx \\ dv_1 = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \right) = \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \int x \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u_2 = x \Rightarrow du_2 = dx \\ dv_2 = \sin x dx \Rightarrow v_2 = -\cos x \end{array} \right] = \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) = \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

3) К третьей группе относятся интегралы вида $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$, Обозначая любой из интегралов этой группы через I и применяя дважды формулу интегрирования по частям, мы получим для

определения I линейное уравнение.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл $I = \int \cos(\ln x) dx$.

► Имеем
$$I = \int \cos(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\sin(\ln x) \frac{dx}{x}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} u_1 = \sin(\ln x) \Rightarrow du_1 = \cos(\ln x) \frac{dx}{x}, \\ dv_1 = dx \Rightarrow v_1 = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \Rightarrow 2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C \quad \blacktriangleleft$$

Конечно, рассмотренные три группы не исчерпывают всех интегралов, берущихся посредством интегрирования по частям и приведения к себе. Примерами интегралов, не входящих ни в одну из перечисленных трех групп, но вычисляемых с помощью формулы интегрирования по частям и приведения к себе, могут служить следующие интегралы (которые будут рассмотрены на практических занятиях):

$$I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad I = \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx, \quad I = \int \frac{x dx}{\cos^2 x}, \quad I = \int \frac{\operatorname{arccctg} e^x}{e^x} dx,$$

$$I = \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx, \quad I = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx, \quad I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \text{ и др.}$$

Разработал профессор

кафедры высшей математики

Халидов И.А.