Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Лекция №03. Интегрирование рациональных
дробей.

Учебные вопросы:

1. Разложение правильных рациональных дробей с вещественными коэффициентами на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами.
2. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Литература

1. Аксенов А.П. Математика. Математический анализ. Ч. 1: Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2004.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. М., Физматлит, 2015. 444 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов – ЭБС «Айбукс.ру/ ibooks.ru». М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

1. Разложение правильных рациональных дробей с вещественными коэффициентами на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами.

Определение. *Дробно-рациональной функцией*, или *рациональной дробью*, называется функция вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \qquad (1)$$

где $n, m \in \mathbf{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – постоянные числа. Если $n < m$, то рациональная дробь (1) называется *правильной*; если же $n \geq m$, то *неправильной*.

Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильная, то ее с помощью деления «столбиком» можно всегда представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби, поэтому далее рассматриваем только правильные рациональные дроби.

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,\dots)$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(\frac{p^2}{4}<q)$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(\frac{p^2}{4}<q,\ k=2,3,\dots)$,

где $A,\ M,\ N,\ a,\ p,\ q$ – постоянные вещественные числа.

Теорема 1. Пусть имеется правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть вещественное число a является корнем кратности k знаменателя $Q(x)$, т. е.

$$Q(x)=(x-a)^k\varphi(x),\text{ где } \varphi(a)\neq 0.$$

Тогда для дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($=\frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}$) справедливо следующее представление:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)}. \qquad (2)$$

В представлении (2) A_1 – вещественное число, $\tilde{P}(x)$ – некоторый многочлен с вещественными коэффициентами, причем дробь $\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)}$ является правильной.

▶ Рассмотрим разность $R=\frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^k}$. Имеем $R=\frac{P(x)-A_1\varphi(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}$. Ясно, что $P(x)-A_1\varphi(x)$ есть алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами. Попытаемся подобрать число A_1 таким, чтобы многочлен $P(x)-A_1\varphi(x)$ делился без остатка на разность $(x-a)$. Это будет лишь тогда, когда число a является корнем многочлена $P(x)-A_1\varphi(x)$, т. е. когда $P(a)-A_1\varphi(a)=0$, или когда $A_1=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$. Так как $\varphi(a)\neq 0$, то такое число A_1 обязательно существует.

Таким образом, получаем: если в качестве числа A_1 брать число $\frac{P(a)}{\varphi(a)}$, то будем иметь $P(x)-A_1\varphi(x)=(x-a)\tilde{P}(x)$, где $\tilde{P}(x)$ – алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами. Но тогда

$$R=\frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^k}=\frac{(x-a)\tilde{P}(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}=\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)},$$

а это и требовалось установить. Подчеркнем ещё раз, что рациональная дробь $\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)}$ является правильной рациональной дробью с вещественными коэффициентами. ◀

Замечание. Если $k>1$, то к правильной рациональной дроби $\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)}$ можно применить доказанную выше теорему. В результате получим

$$\frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\varphi(x)}=\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{\tilde{\tilde{P}}(x)}{(x-a)^{k-2}\varphi(x)},$$

где A_2 – постоянное число, а $\frac{\tilde{\tilde{P}}(x)}{(x-a)^{k-2}\varphi(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Продолжая этот процесс, после k-кратного применения теоремы 1, будем иметь:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{k-2}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{P_*(x)}{\varphi(x)},$$

где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_k$ – постоянные числа, а $\frac{P_*(x)}{\varphi(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами.

Теорема 2. Пусть имеется правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть комплексное число $a=\alpha+i\beta$ является корнем кратности k знаменателя $Q(x)$ (значит, и число $\bar{a}=\alpha-i\beta$ также является корнем кратности k знаменателя $Q(x)$) и, следовательно,

$$Q(x)=(x-a)^k(x-\bar{a})^k\varphi(x)=(x^2+px+q)^k\varphi(x),$$

где $\varphi(\alpha\pm i\beta)\neq 0$. Тогда для дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($=\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}$) справедливо следующее представление:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}. \qquad (3)$$

В представлении (3) $M_1,\ N_1$ – вещественные числа, а $\tilde{P}(x)$ – некоторый алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами, причем дробь $\dfrac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}$ является правильной.

▶ Рассмотрим разность $R=\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}-\dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}$. Имеем $R=\dfrac{P(x)-(M_1x+N_1)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}$. Отметим, что $P(x)-(M_1x+N_1)\varphi(x)$ есть алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами. Попытаемся подобрать числа M_1 и N_1 такими, чтобы число $a=\alpha+i\beta$ (значит, и число $\bar{a}=\alpha-i\beta$) было корнем многочлена $P(x)-(M_1x+N_1)\varphi(x)$, т. е. чтобы было:

$$P(\alpha+i\beta)-\left[M_1(\alpha+i\beta)+N_1\right]\cdot\varphi(\alpha+i\beta)=0. \qquad (4)$$

Так как $\varphi(\alpha+i\beta)\neq 0$, то из (4) находим

$$M_1(\alpha+i\beta)+N_1=\frac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)} \quad\Rightarrow\quad (M_1\alpha+N_1)+i\beta M_1=\frac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}\beta M_1=\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)}\right),\\ M_1\alpha+N_1=\operatorname{Re}\left(\dfrac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)}\right)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}M_1=\dfrac{1}{\beta}\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)}\right),\\ N_1=\operatorname{Re}\left(\dfrac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)}\right)-\dfrac{\alpha}{\beta}\operatorname{Im}\left(\dfrac{P(\alpha+i\beta)}{\varphi(\alpha+i\beta)}\right).\end{cases}$$

При таком выборе чисел M_1 и N_1 многочлен $P(x)-(M_1x+N_1)\varphi(x)$ делится без остатка на произведение $(x-a)(x-\bar{a})=(x^2+px+q)$. Следовательно, будем иметь

$$P(x)-(M_1x+N_1)\cdot\varphi(x)=(x^2+px+q)\cdot\tilde{P}(x),$$

где $\tilde{P}(x)$ – алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами. Но тогда

$$R=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}-\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}=\frac{(x^2+px+q)\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}=\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)},$$

а это и требовалось доказать. Отметим, что рациональная дробь $\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}$ является правильной рациональной дробью с вещественными коэффициентами.

Замечание. Если $k>1$, то к правильной рациональной дроби $\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}$ можно применить доказанную выше теорему 2. Получим при этом:

$$\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}=\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\frac{\tilde{\tilde{P}}(x)}{(x^2+px+q)^{k-2}\varphi(x)},$$

где $M_2,\ N_2$ – постоянные вещественные числа, а $\frac{\tilde{\tilde{P}}(x)}{(x^2+px+q)^{k-2}\varphi(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Продолжая этот процесс, после k-кратного применения теоремы 2 будем иметь:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}+\frac{P_*(x)}{\varphi(x)},$$

где $M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2,\ \ldots,\ M_k,\ N_k$ – постоянные вещественные числа, а $\frac{P_*(x)}{\varphi(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами.

Следствие из теорем 1 и 2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Пусть ее знаменатель раскладывается на множители:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_r$, $p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$ – вещественные числа; $\frac{p_j^2}{4}<q_j$ ($j=\overline{1,s}$); $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ – натуральные числа. Тогда справедливо представление:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-a_1}+$$

$$+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^{\alpha_2-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_2}^{(2)}}{x-a_2}+$$

$$+\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,+$$

$$+\frac{A_1^{(r)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_2^{(r)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_r}^{(r)}}{x-a_r}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\ldots+\frac{M_{\beta_1}^{(1)}x+N_{\beta_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,+$$

$$+\frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{M_{\beta_s}^{(s)}x+N_{\beta_s}^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (5)$$

Замечание. Практическое осуществление представления правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей производится так:

1) Пишут общий вид представления (5) с буквенными коэффициентами (пока неизвестными).

2) В написанном представлении (5) все дроби приводят к общему знаменателю, которым оказывается $Q(x)$.

3) Отбросив затем справа и слева знаменатели, приходят к равенству двух алгебраических многочленов: слева – с конкретными коэффициентами, справа – с буквенными. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x приводит к

системе уравнений, из которой находятся значения интересующих нас неизвестных коэффициентов.

Поясним сказанное на ***примере***. Пусть требуется разложить на простейшие правильную дробь: $\dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.

Решение. 1) Пишем общий вид разложения:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

2) Приводим все дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

3) Мысленно отбрасываем знаменатели в полученном равенстве и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В результате получаем:

$$\left.\begin{array}{l} x^3|\ 2=B+M, \\ x^2|\ 4=A+N-2M, \\ x\ |\ 1=A+M-2N, \\ x^0|\ 2=A-B+N \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad A=3,\ B=2,\ M=0,\ N=1. \qquad (6)$$

Следовательно,

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Замечание. Вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в числителях часто рационально приравнивать значения многочленов при конкретных *x*, в первую очередь, при тех *x*, которые являются корнями знаменателя (для таких значений *x* много слагаемых обращается в нуль).

2. **Интегрирование простейших рациональных дробей.**

Для простейших рациональных дробей, а именно, рациональных дробей типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};\quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}\ \ (k\in\mathbf{N}, k\geq 2);\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \ \left(\frac{p^2}{4}<q\right);$$

IV. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\dfrac{p^2}{4}<q\right.$ и $\left.k\geq 2\right)$,

где $a,\ p,\ q,\ A,\ M,\ N$ – постоянные вещественные числа, имеем:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$.

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$ (у нас $k\neq 1$).

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Заметим, что этот интеграл берется особенно легко в следующих двух частных случаях:

1 случай: когда $Mx+N\equiv 2x+p$, т. е. когда числитель подынтегральной функции есть точная производная знаменателя. Имеем в этом случае:

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q)+C.$$

2 случай: когда $Mx+N\equiv N$, т. е. когда числитель подынтегральной функции есть постоянное число. Имеем в этом случае:

$$\int\frac{N}{x^2+px+q}dx = N\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = N\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{N}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$ (у нас $q-\dfrac{p^2}{4}>0$).

Рассмотрим теперь общий случай. Он сводится к только что рассмотренным частным случаям. В самом деле, имеем $Mx+N = M(2x+p)\cdot\dfrac{1}{2}+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)$. А тогда

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$. Так как $Mx+N=M(2x+p)\cdot\frac{1}{2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$, то

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^k},\qquad(7)$$

где $z=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$. Видим, что мы сможем вычислить интеграл от рациональной дроби типа IV, если вычислим интеграл $I_k=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^k}$. Перепишем интеграл I_k в виде $I_k=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad I_k=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+z^2)-z^2}{(z^2+a^2)^k}dz=\frac{1}{a^2}\left[\underbrace{\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}}_{=I_{k-1}}-\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_k=\frac{1}{a^2}\left[I_{k-1}-\int z\cdot\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^k}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}u=z\quad\Rightarrow\quad du=dz;\\ dv=\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^k}\quad\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(z^2+a^2)^{k-1}}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[I_{k-1}-\frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(1-k)}\underbrace{\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}}_{=I_{k-1}}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_k=\frac{1}{a^2}\left[I_{k-1}-\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}+\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^{k-1}}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_k = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1}\right]. \qquad (8)$$

(8) – рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1}. Мы знаем, что:

$$I_1 = \int\frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C.$$

А тогда, пользуясь формулой (∗), мы можем последовательно вычислить I_2, затем I_3, и т. д.

Итак, нами вычислены интегралы от всех четырех типов простейших рациональных дробей и показано, что каждый из этих интегралов представляет собой элементарную функцию.

В качестве ***примера*** проинтегрируем полученное в конце первого раздела лекции разложение рациональной дроби на простейшие дроби. Имеем

$$\int\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int\left(\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx = ¿¿$$

$$¿ -\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Разработал профессор

кафедры высшей математики

Халидов И.А.