Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Лекция №04. Метод Остроградского и интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей.

Учебные вопросы:

1. Интегрирование по методу Остроградского.
2. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.
3. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Литература

1. Аксенов А.П. Математика. Математический анализ. Ч. 1: Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2004.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. М., Физматлит, 2015. 444 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов – ЭБС «Айбукс.ру/ ibooks.ru». М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

1. Интегрирование по методу Остроградского.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Пусть знаменатель $Q(x)$ этой дроби имеет вид:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}. \quad (1)$$

Тогда, как мы знаем, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представима в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-a_1}+\dots+$$

$$+\frac{A_1^{(r)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_2^{(r)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha_r}^{(r)}}{x-a_r}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\dots+\frac{M_{\beta_1}^{(1)}x+N_{\beta_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\dots+$$

$$+\frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\dots+\frac{M_{\beta_s}^{(s)}x+N_{\beta_s}^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \quad (2)$$

Проинтегрируем, например, группу слагаемых, входящих в состав суммы (2) и соответствующих вещественному корню a_1 полинома $Q(x)$. Получим

$$\frac{A_1^{(1)}}{1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\frac{A_2^{(1)}}{2-\alpha_1}\cdot\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}}+\ldots-\frac{A_{\alpha_1-1}^{(1)}}{x-a_1}+A_{\alpha_1}^{(1)}\ln|x-a_1|=$$

$$=\frac{P_{(1)}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+A_{\alpha_1}^{(1)}\ln|x-a_1|,$$

где $\dfrac{P_{(1)}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Проинтегрировав группы слагаемых, входящих в состав суммы (2) и соответствующих вещественным корням $a_2,\ \ldots,\ a_r$ полинома $Q(x)$, получим

$$\frac{P_{(2)}(x)}{(x-a_2)^{\alpha_2-1}}+A_{\alpha_2}^{(2)}\ln|x-a_2|;\quad \ldots,\quad \frac{P_{(r)}(x)}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+A_{\alpha_r}^{(r)}\ln|x-a_r|.$$

Нетрудно также понять, что в результате интегрирования каждой группы слагаемых, входящих в состав суммы (2) и соответствующих паре комплексных сопряженных корней: $-\dfrac{p_l}{2}\pm i\sqrt{q_l-\dfrac{p_l^2}{4}}$, $l=\overline{1,s}$ полинома $Q(x)$, мы будем получать:

$$\frac{\tilde{P}_{(l)}(x)}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l-1}}+B_{\beta_l}^{(l)}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p_l}{2}}{\sqrt{q_l-\dfrac{p_l^2}{4}}},\quad l=\overline{1,s},$$

где $\dfrac{\tilde{P}_{(l)}(x)}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l-1}}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Следовательно, в результате интегрирования равенства (2) будем иметь:

$$\int\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}dx=$$

$$=\frac{P_{(1)}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{P_{(r)}(x)}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\frac{\tilde{P}_{(1)}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\ldots+\frac{\tilde{P}_{(s)}(x)}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+$$

$$+A_{\alpha_1}^{(1)}\ln|x-a_1|+\ldots+A_{\alpha_r}^{(r)}\ln|x-a_r|+B_{\beta_1}^{(1)}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p_1}{2}}{\sqrt{q_1-\frac{p_1^2}{4}}}+\ldots+B_{\beta_s}^{(s)}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p_s}{2}}{\sqrt{q_s-\frac{p_s^2}{4}}}. \quad (3)$$

Сложив все рациональные дроби в правой части равенства (3), мы получим правильную дробь с вещественными коэффициентами:

$$\frac{P_*(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}.$$

Заметим, далее, что трансцендентные слагаемые (логарифмы и арктангенсы) в правой части равенства (3) получаются в результате интегрирования простейших дробей, знаменателями которых являются первые степени множителей, входящих в разложение $Q(x)$. Если объединить все эти приводящие к трансцендентным функциям интегралы в один, сложив подынтегральные функции, то получим интеграл от правильной дроби:

$$\int\frac{P_{**}(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}dx.$$

Принимая во внимание все сказанное выше, Остроградский предложил выражение для интеграла: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, искать в виде:

$$\int\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}dx=$$

$$=\frac{P_*(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+$$

$$+\int\frac{P_{**}(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)}dx, \quad (4)$$

где $P_*(x)$ и $P_{**}(x)$ – некоторые полиномы с вещественными коэффициентами (пока неизвестными). Степень полинома $P_*(x)$ на единицу меньше степени полинома

$$Q_*(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1},$$

а степень полинома $P_{**}(x)$ на единицу меньше степени полинома

$$Q_{**}(x) = (x - a_1)\dots(x - a_r)(x^2 + p_1 x + q_1)\dots(x^2 + p_s x + q_s).$$

Неизвестные коэффициенты полиномов $P_*(x)$ и $P_{**}(x)$ находят так:

1) Дифференцируют обе части соотношения (4).

2) Получившиеся при этом дроби приводят к общему знаменателю.

3) Отбросив затем справа и слева знаменатели, приходят к равенству двух алгебраических многочленов: слева – с конкретными коэффициентами, справа – с буквенными. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x приводит к системе линейных уравнений, из которой находятся значения интересующих нас неизвестных коэффициентов. Поясним изложенное на ***примере***.

Пусть требуется вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Решение. 1) Записываем соотношение (4) применительно к нашему примеру:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} dx,$$

где $A,\ B,\ C,\ D$ – неизвестные пока числа.

2) Дифференцируем обе части написанного соотношения. Получаем:

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B)}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

3) Приводим все дроби к общему знаменателю.

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

4) Мысленно отбрасываем знаменатели в полученном равенстве и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В результате получаем:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 |\ 0 = C \\ x^2 |\ 0 = -A + C + D \\ x\ \ |\ 0 = -2B + C + D \\ x^0 |\ 1 = A - B + D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{2}{3},\ B = \frac{1}{3},\ D = \frac{2}{3},\ C = 0.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Замечание. Метод Остроградского позволяет находить рациональную часть интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ чисто алгебраическим путем. Этот метод исключает вопрос интегрирования простейших дробей типов II и IV, что особенно ценно в отношении дробей типа IV, интегрирование которых сопряжено с длинными выкладками, – в особенности тогда, когда в разложении дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие получается много дробей типа IV, и мы оказываемся вынужденными многократно пользоваться рекуррентной формулой (8) предыдущей лекции.

2. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Интегралы от иррациональных функций в большинстве случаев в конечном виде не берутся. Однако в ряде случаев интегрирование выражений, содержащих иррациональности, с помощью надлежащим образом выбранных подстановок удается свести к интегрированию рациональных дробей.

Пусть, например,

$$I=\int f\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \qquad (5)$$

где a,b,c,d – постоянные вещественные числа, такие, что $ad-bc\neq 0$; $m,n,\ldots,q$ – целые числа, а функция f – рациональная относительно всех своих аргументов. Покажем, что интеграл типа (5) берется в конечном виде.

▶ Сделаем замену переменной интегрирования, положив $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$, где N –

наименьшее общее кратное чисел: $m, n, \dots, q$. Тогда $x = \frac{t^N d - b}{a - t^N c} = f_1(t)$, где $f_1(t)$ – рациональная функция от t; $dx = \frac{(ad - bc)\,Nt^{N-1}}{(a - t^N c)^2} dt = f_2(t)\,dt$, где $f_2(t)$ – рациональная функция от t. Так как $\frac{N}{m} = \tilde{m}$, $\frac{N}{n} = \tilde{n}$, $\cdots$, $\frac{N}{q} = \tilde{q}$ – целые числа и так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то получим: $I = \int \tilde{f}(t)\,dt$, где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t. А такой интеграл, как мы знаем, берется в конечном виде. ◀

Пример 1. Вычислить $I = \int \frac{\sqrt{x+5}}{\left(\sqrt{x+5} + \sqrt[3]{x+5}\right)^4} dx$, $x \in (-5, +\infty)$.

Решение. Делаем замену: $x + 5 = t^6 \;\Rightarrow\; dx = 6t^5 dt$. Тогда

$$I = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5}{(t^3 + t^2)^4} dt = 6\int \frac{t^8 dt}{t^8 (t+1)^4} = 6\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^4} = -\frac{2}{(t+1)^3} + C.$$

Возвращаясь к прежней переменной, получаем ответ: $I = -\frac{2}{\left(\sqrt[6]{x+5} + 1\right)^3} + C$.

3. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Пусть имеется интеграл вида:

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p dx, \tag{6}$$

где m, n, p – рациональные числа: $m = \frac{\alpha}{\beta}$, $n = \frac{\gamma}{\delta}$, $p = \frac{\lambda}{\mu}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ – целые числа); a и b – постоянные вещественные числа. Подынтегральное выражение в (6) носит название *биномиального дифференциала*.

Покажем, что интеграл (II) берется в конечном виде, если оказывается целым хотя бы одно из следующих трех чисел: p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$.

Во всех иных случаях интеграл типа (6) в конечном виде не берется. Это было установлено П.Л. Чебышёвым.

▶ 1. Пусть p – целое.

В этом случае делаем замену: $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное чисел β и δ. При такой замене имеем: $x^m = t^{\frac{N}{\beta}\alpha} = t^{\tilde{m}}$, где $\tilde{m}$ – целое; $x^n = t^{\frac{N}{\delta}\gamma} = t^{\tilde{n}}$, где $\tilde{n}$ – целое; $dx = Nt^{N-1}dt$. Получаем, следовательно,

$$I = N\int t^{\tilde{m}}(at^{\tilde{n}} + b)^p t^{N-1}dt = N\int \tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t. А такой интеграл берется в конечном виде.

2. Пусть $\dfrac{m+1}{n}$ – целое.

В этом случае делаем замену: $ax^n + b = t^\mu$ (μ – знаменатель числа p). При такой замене имеем:

$$x = \left(\frac{t^\mu - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{t^\mu - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\mu}{a}t^{\mu-1}dt; \quad (ax^n + b)^p = t^{\mu\cdot p} = t^{\mu\frac{\lambda}{\mu}} = t^\lambda.$$

Получаем, следовательно,

$$I = \frac{\mu}{an}\int t^{\lambda+\mu-1}\left(\frac{t^\mu - b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dt = \frac{\mu}{an}\int \tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t. А такой интеграл берется в конечном виде.

3. Пусть $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое.

В этом случае делаем замену: $\dfrac{ax^n + b}{x^n} = t^\mu$ (μ – знаменатель числа p). При такой замене имеем:

$$a + bx^{-n} = t^\mu \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{t^\mu - a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}}; \quad dx = -\frac{1}{n}\left(\frac{t^\mu - a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\mu}{b}t^{\mu-1}dt;$$

$$(ax^n+b)^p=(x^n t^\mu)^p=x^{np}t^{\mu p}=\left(\frac{t^\mu-a}{b}\right)^{-p}t^\lambda.$$

Получаем, следовательно,

$$I=-\frac{\mu}{bn}\int t^{\lambda+\mu-1}\left(\frac{t^\mu-a}{b}\right)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1}dt=-\frac{\mu}{bn}\int\tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t. А такой интеграл берется в конечном виде. ◄

Пример 2. *Вопрос.* Берется или нет интеграл $I=\int\sqrt{1+x^3}\,dx$ ($=\int(x^3+1)^{1/2}dx$) в конечном виде?

Решение. Здесь $m=0$, $n=3$, $p=\frac{1}{2}$. Имеем:

1) $p=\frac{1}{2}$ – не целое число.

2) $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}$ – не целое число.

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ – не целое число.

Вывод. Данный интеграл в конечном виде не берется.

Разработал профессор

кафедры высшей математики

Халидов И.А.