

Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Лекция № 05. Интегрирование квадратичных
иррациональностей и тригонометрических функций.

Учебные вопросы:

1. Интегрирование квадратичных иррациональностей.
2. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Литература

1. Аксенов А.П. Математика. Математический анализ. Ч. 1: Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2004.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. М., Физматлит, 2015. 444 с.
3. Тер-Криков А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов – ЭБС «Айбукс.ру/ ibooks.ru». М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

1. Интегрирование квадратичных иррациональностей.

Пусть имеется интеграл вида:

$$I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad (1)$$

где a, b, c – постоянные вещественные числа, а функция f – рациональная относительно обоих своих аргументов. Заметим сразу: если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет комплексные корни, то интеграл типа (1) имеет смысл рассматривать лишь при $a > 0$ (ибо в этом случае $ax^2 + bx + c > 0$ лишь при $a > 0$). Поэтому при $a < 0$ имеет смысл рассматривать лишь случай, когда корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ вещественные и различные.

Покажем, что интеграл типа (1) берется в конечном виде.

► 1) Пусть $a > 0$. В этом случае делаем замену: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ (это – так называемая *первая подстановка Эйлера*). Возведение обеих частей равенства в квадрат дает $ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a} \cdot tx + ax^2$. Видим, что член ax^2 сокращается (в этом «соль» подстановки Эйлера), и мы получаем для x рациональное выражение

через t : $x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a} \cdot t} = f_1(t)$, где $f_1(t)$ – рациональная функция от t . Имеем, далее,

$$dx = \frac{2t(b + 2\sqrt{a} \cdot t) - 2\sqrt{a} \cdot (t^2 - c)}{(b + 2\sqrt{a} \cdot t)^2} dt = f_2(t) dt$$

где $f_2(t)$ – рациональная функция от t . $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \cdot f_1(t) = f_3(t)$, где $f_3(t)$ – рациональная функция от t . Таким образом, получаем:

$$I = \int f(f_1(t), f_3(t)) \cdot f_2(t) dt = \int \tilde{f}(t) dt$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t .

Вывод: интеграл I берется в конечном виде.

2) Пусть $a < 0$ и трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет вещественные различные корни x_1 и x_2 . Тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Делаем замену (это – *вторая подстановка Эйлера*):

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t \quad (2)$$

Возведение обеих частей равенства (2) в квадрат дает:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2 t^2 \Rightarrow a(x - x_2) = (x - x_1)t^2 \Rightarrow x = \frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a} = f_1(t)$$

где $f_1(t)$ – рациональная функция от t . Имеем, далее,

$$dx = \frac{2x_1 t(t^2 - a) - 2t(x_1 t^2 - ax_2)}{(t^2 - a)^2} dt = f_2(t) dt$$

где $f_2(t)$ – рациональная функция от t . $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot [f_1(t) - x_1] = f_3(t)$, где $f_3(t)$ – рациональная функция от t . Получаем, таким образом,

$$I = \int f(f_1(t), f_3(t)) \cdot f_2(t) dt = \int \tilde{f}(t) dt$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция от t .

Вывод: интеграл I берется в конечном виде. ◀

Замечание. Подстановки Эйлера при вычислении интегралов типа (1) часто приводят к интегралам от громоздких рациональных дробей. Рассмотрим некоторые частные случаи, когда для вычисления интегралов типа (1) более удобными оказываются другие способы.

1°. Пусть имеется интеграл вида:

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad (3)$$

где $P_n(x)$ – полином степени n . Видим, что (3) – интеграл типа (1) и, следовательно, он может быть вычислен с помощью подстановок Эйлера. Но этот интеграл может быть вычислен и методом неопределенных коэффициентов по формуле:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (4)$$

где λ – некоторое постоянное число (пока неопределенное), $Q_{n-1}(x)$ – полином степени $(n - 1)$ с неопределенными коэффициентами. λ и коэффициенты полинома $Q_{n-1}(x)$ находят так:

1) Дифференцируют по x обе части соотношения (4). Получают

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q'_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + Q_{n-1}(x) \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

2) В полученном соотношении все дроби приводят к общему знаменателю

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{Q'_{n-1}(x) \cdot (ax^2 + bx + c) + Q_{n-1}(x) \cdot \left(ax + \frac{b}{2}\right) + \lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

3) Мысленно отбрасывают знаменатели в последнем равенстве и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В результате получают систему $(n + 1)$ линейных уравнений, из которых находят λ и коэффициенты полинома $Q_{n-1}(x)$.

2°. Рассмотрим интеграл вида:

$$I = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (5)$$

где α, a, b, c – постоянные вещественные числа, k – натуральное число. Сделаем

замену, положив
$$x - \alpha = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} + \alpha, \quad dx = -\frac{dt}{t^2};$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{1}{t} + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t} + \alpha\right) + c = \frac{a}{t^2} + \frac{2\alpha a}{t} + \alpha^2 a + \frac{b}{t} + b\alpha + c = \\ &= \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2\alpha a + b)t + a}{t^2} = \frac{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}{t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\sqrt{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}}{t}. \end{aligned}$$

Следовательно,
$$I = -\operatorname{sgn} t \cdot \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{\tilde{a}t^2 + \tilde{b}t + \tilde{c}}}.$$
 Видим, что пришли к интегралу вида (3) (см. пункт 1°).

3°. Рассмотрим интеграл вида:

$$I = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + q)^k \sqrt{ax^2 + c}} dx, \quad (6)$$

где M, N, q, a, c – постоянные вещественные числа, $k \in \mathbf{N}$. Представим интеграл (6) в виде суммы двух интегралов:

$$I = M \int \frac{x dx}{(x^2 + q)^k \sqrt{ax^2 + c}} + N \int \frac{dx}{(x^2 + q)^k \sqrt{ax^2 + c}}.$$

$\quad \quad \quad = I_1 \text{ (обознач.)} \quad \quad \quad = I_2 \text{ (обознач.)}$

В интеграле I_1 сделаем замену: $x^2 = t \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$. Получим:

$$I_1 = \frac{M}{2} \int \frac{dt}{(t + q)^k \sqrt{at + c}}.$$
 Это – интеграл типа (I). Интеграл I_2 перепишем в виде:

$$I_2 = N \int \frac{dx}{x^{2k} \left(1 + \frac{q}{x^2}\right)^k x \cdot \operatorname{sgn} x \sqrt{a + \frac{c}{x^2}}} = N \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1} \frac{dx}{x^3}}{\operatorname{sgn} x \cdot \left(1 + \frac{q}{x^2}\right)^k \sqrt{a + \frac{c}{x^2}}}.$$

В получившемся выражении для I_2 делаем замену:

$$\frac{1}{x^2} = u \Rightarrow -\frac{2dx}{x^3} = du \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = -\frac{du}{2}.$$

Будем иметь

$$I_2 = -\frac{N}{2} \operatorname{sgn} x \int \frac{u^{k-1} du}{(1 + qu)\sqrt{a + cu}}.$$

Это – интеграл типа (1) из предыдущей лекции, поэтому он вычисляется аналитически с помощью замены $s = \sqrt{a + cu}$.

2. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

I. Пусть имеется интеграл вида:

$$I = \int f(\sin x, \cos x) dx, \quad (7)$$

где f – рациональная функция относительно обоих своих аргументов.

► Покажем, что интегралы типа (7) всегда берутся в конечном виде. С этой целью сделаем замену (это – *универсальная тригонометрическая подстановка*), положив

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Заметим, что равенство $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ влечет за собой используемое нами равенство

$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, строго говоря, лишь тогда, когда $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ ($\Leftrightarrow -\pi < x < \pi$). Однако, в

силу периодичности функции $f(\sin x, \cos x)$, нам этого вполне достаточно.

Из тригонометрии известно, что

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и, следовательно, будем иметь

$$I = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \tilde{f}(t) dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция аргумента t (ибо рациональная функция от рациональных функций представляет собой также рациональную функцию). А такой интеграл, как мы знаем, берется в конечном виде. ◀

Замечание. Подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ универсальна при вычислении интегралов типа (I), но она часто приводит к интегралам от громоздких рациональных дробей. Отметим случаи, когда более удобными могут оказаться другие подстановки:

1) Если функция $f(\sin x, \cos x)$ такая, что $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, то следует делать подстановку: $\sin x = t$.

2) Если функция $f(\sin x, \cos x)$ такая, что $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, то следует делать подстановку: $\cos x = t$.

3) Если функция $f(\sin x, \cos x)$ такая, что $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, то следует делать подстановку: $\operatorname{tg} x = t$.

II. Рассмотрим интеграл вида:

$$I = \int \sin^{\mu} x \cdot \cos^{\nu} x dx, \quad (8)$$

где μ и ν – рациональные числа.

► Покажем, что интегралы типа (8) берутся в конечном виде лишь в следующих двух случаях:

1) когда хотя бы одно из двух чисел μ, ν есть число целое и нечетное;

2) когда сумма $\mu + \nu$ чисел μ и ν есть число целое и четное.

С этой целью запишем подынтегральное выражение в (8) в виде:

$$\sin^{\mu} x \cdot \cos^{\nu} x dx = \frac{1}{2} \sin^{\mu-1} x \cdot \cos^{\nu-1} x \cdot 2 \sin x \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{\nu-1}{2}} d(\sin^2 x).$$

Сделаем замену, положив $\sin^2 x = t$. Будем иметь тогда:

$$I = \frac{1}{2} \int t^{\frac{\mu-1}{2}} (1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} dt.$$

Видим, что получили интеграл от биномиального дифференциала. Здесь в роли m

выступает число $\frac{\mu-1}{2}$; в роли n – число 1; в роли p – число $\frac{\nu-1}{2}$. Мы знаем, что интеграл от биномиального дифференциала берется в конечном виде лишь в следующих трех случаях:

1. Когда число p – целое $\Leftrightarrow \frac{\nu-1}{2}$ – целое $\Leftrightarrow \nu$ – целое, нечетное.

2. Когда число $\frac{m+1}{n}$ – целое $\Leftrightarrow \frac{\mu-1}{2} + 1$ – целое $\Leftrightarrow \frac{\mu+1}{2}$ – целое $\Leftrightarrow \mu$ – целое, нечетное.

3. Когда $\frac{m+1}{n} + p$ – целое $\Leftrightarrow \left(\frac{\mu+1}{2} + \frac{\nu-1}{2} \right)$ – целое $\Leftrightarrow \frac{\mu+\nu}{2}$ – целое $\Leftrightarrow \mu + \nu$ – целое, четное. ◀

Замечание. Подстановка $\sin^2 x = t$ помогла нам решить принципиальный вопрос: когда интеграл типа (8) берется в конечном виде. Следует отметить, что этой подстановкой целесообразно пользоваться лишь в крайнем случае, когда нет иных путей, так как она часто приводит к громоздким выкладкам.

**Разработал профессор
кафедры высшей математики**

Халидов И.А.