№ 01. Введение в математический анализ

Тема № 01. Вещественные числа

Лекция № 04. Классы вещественных чисел

Учебные вопросы:

1. Натуральные числа
2. Целые числа
3. Рациональные числа

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Натуральные числа

1^0. Множество натуральных чисел.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$ называется *индуктивным*, если

$$(\forall x)\left(x \in X \Rightarrow x+1 \in X\right). \tag{1}$$

Определение. *Множество* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел* — наименьшее индуктивное множество вещественных чисел, содержащее 1.

2^0. Принцип математической индукции.

$$\begin{matrix} E \subset \mathbb{N}, 1 \in E \\ (\forall n)\left(n \in E \Rightarrow n+1 \in E\right) \end{matrix} \Rightarrow E = \mathbb{N}. \tag{2}$$

В математическом анализе важную роль играют *индуктивные доказательства*. Желая доказать справедливость некоторого утверждения **для всех натуральных** n, мы проверяем его сначала для $n=1$ (*база индукции*), а затем устанавливаем, что если утверждение верно для некоторого натурального n, то оно оказывается верным и для $n+1$ (*индукционный переход*). Таким образом, множество E натуральных чисел, для которых доказываемое утверждение верно, содержит число 1 и является индуктивным. Приходим к выводу, что $E = \mathbb{N}$.

Проиллюстрируем доказательство по индукции на примере неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Предложение 1. Пусть $a_1,\ldots,a_n > 0$. Тогда

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{3}$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, если все числа равны между собой.

Начнем с доказательства вспомогательного утверждения.

Предложение 2. Пусть $b_1,\ldots,b_n>0,\ b_1\cdots b_n=1$. Тогда

$$b_1+\cdots+b_n\ge n. \tag{4}$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, если все числа равны между собой.

▶Если все числа равны между собой, т.е. $b_1=\cdots=b_n=1$, утверждение очевидно. Будем считать, что $b_{n-1}<1,\ b_n>1$.

База индукции. $b_1<1,\ b_2>1,\ (1-b_1)(b_2-1)>0,\ b_2+b_1-1-b_1b_2>0,$ $b_1+b_2>1+b_1b_2=2.$

Индукционный переход. Предположим справедливость неравенства для n чисел и применим его к n числам $b_1,\ldots,b_{n-1},b_nb_{n+1}$. Получим неравенство $b_1+\cdots+b_{n-1}+b_nb_{n+1}\ge n$. Сложив его с неравенством $b_n+b_{n+1}-b_nb_{n+1}>1$, получим требуемое.

Для доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим положим

$$b_k=\frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}.$$

По доказанному $b_1+\cdots+b_n\ge n$, т.е.

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}\ge n,\ \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\,.$$◀

3^0. Свойства натуральных чисел.

1) $\forall m,n\in\mathbb{N}\ m+n,\ mn\in\mathbb{N}$.

2) 1 — наименьшее натуральное число.

Действительно, луч $[1, +\infty)$ содержит 1 и является индуктивным, поэтому $\mathbb{N} \subset [1, +\infty)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}\ n \neq 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \cap (n, n+1) = \varnothing$.

5) Всякое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

6) Всякое ограниченное сверху множество натуральных чисел имеет наибольший элемент.

7) Принцип Архимеда.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \varepsilon\mathbb{N}$ не ограничено сверху. В частности, $\mathbb{N}$ — неограниченное множество.

▶Допустим противное, положим $M = \sup \varepsilon\mathbb{N}$. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n\varepsilon > M - \varepsilon$. В таком случае

$$(n+1)\varepsilon > M,$$

что противоречит определению M.◀

Следствия. 1) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \frac{1}{n} < \varepsilon$. 2) $\left(\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \le x \le \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x = 0$.

2. Целые числа

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$ — множество *целых чисел*, элементы множества $\mathbb{Z}$ называются *целыми числами*.

1) В множестве целых чисел выполнимы операции сложения, умножения, перехода к противоположному.

2) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \cap (n, n+1) = \varnothing$.

3) Всякое ограниченное сверху множество целых чисел имеет наибольший элемент. Всякое ограниченное снизу множество целых чисел имеет наименьший элемент.

▶Пусть $E \subset \mathbb{Z}$ ограничено сверху. Положим $M = \sup E$. Теперь $\exists x \in E\ x > M - 1$. Найденное число x — наибольшее в E (если в E найдется число $y > x$, то $y \le M$ и $y - x < 1$, вопреки свойству 2). ◀

4) Пусть $\rho > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists k \in \mathbb{Z}\ k\rho \le x < (k+1)\rho$.

▶ Может случиться, что $x = k\rho$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, в таком случае k уже найдено.

Пусть $x > 0$. По принципу Архимеда найдется $n \in \mathbb{N}\ n\rho > x$. Среди таких чисел выберем наименьшее число m, тогда $(m-1)\rho \le x < m\rho$. Полагаем $k = m - 1$.

Если $x < 0$, те же построения для $y = -x > 0$ дают неравенства

$$(m-1)\rho < -x < m\rho,\ -m\rho < x < (1-m)\rho. \text{ Полагаем } k = -m. ◀$$

Понятно, что число k единственно, промежутки $[k\rho, (k+1)\rho)$ не пересекаются и покрывают все множество вещественных чисел.

Особый интерес проведенное построение имеет при $\rho = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! k \in Z\ k \le x < k+1. \qquad (1)$$

Найденное целое число k называется целой частью числа x и обозначается через $[x]$; $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

3. Рациональные числа

1^0. $\mathbb{Q}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \exists m\in\mathbb{Z}\ n\in\mathbb{N}\ x=\dfrac{m}{n}\right\}$ — множество *рациональных чисел*.

2^0 Плотность множества рациональных чисел.

Теорема. *Множество рациональных чисел всюду плотно в* $\mathbb{R}$*, то есть всякий интервал в множестве вещественных чисел содержит рациональные числа*:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \left(\alpha<\beta\Rightarrow\exists q\in\mathbb{Q}\ q\in(\alpha,\beta)\right). \tag{2}$$

▶ Положим $\varepsilon=\beta-\alpha>0$. По принципу Архимеда $\exists n\in\mathbb{N}\ \ \dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Далее,

$$\exists k\in\mathbb{Z}\ \ \frac{k}{n}\le\alpha<\frac{k+1}{n}.$$

Полагая $m=k+1$, получаем искомое число $q=\dfrac{m}{n}$

($q>\alpha,\ q=\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{n}<\alpha+\varepsilon=\beta$).◀

3^0. Приближение вещественных чисел рациональными.

Каждое вещественное число с любой степенью точности можно приблизить рациональным числом. Приближение можно построить с помощью десятичных дробей. Ограничимся рассмотрением чисел $x\in(0,1]$. Среди дробей $0.0, 0.1, 0.2,\dots,0.9$ выберем наибольшую $0.\alpha_1$, меньшую x, положим $x_1=0.\alpha_1$. Среди дробей $0.\alpha_1 0,\ 0.\alpha_1 1,\ \dots 0.\alpha_1 9$ выберем наибольшую $0.\alpha_1\alpha_2$, меньшую x, положим $x_2=0.\alpha_1\alpha_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $x_n=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ десятичных приближений вещественного числа x, при всяком n справедливо неравенство

$0 < x - x_n \le \frac{1}{10^n}$. Вещественное число оказалось представленным бесконечной десятичной дробью. Между вещественными числами и бесконечными десятичными дробями установлено взаимно однозначное соответствие.

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.