



Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 02. Вещественные числа

Лекция № 05. Мощность множества

Учебные вопросы:

1. Понятие мощности
2. Теорема Шредера-Бернштейна
3. Теорема Кантора
4. Конечные множества
5. Счетные множества
6. Мощность континуума

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. - (Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

Мощность множества

1. Понятие мощности

Определение. Пусть X, Y — множества. Если существует биекция

$$f: X \rightarrow Y,$$

то мы скажем, что эти множества *равномощны* (имеют одинаковую мощность) и напомним

$$\text{card } X = \text{card } Y \quad (|X| = |Y|, X \sim Y). \quad (1)$$

Если существует инъекция

$$f: X \rightarrow Y,$$

то мы скажем, что мощность множества X не превосходит мощности множества Y ,

$$|X| \leq |Y|. \quad (2)$$

В элементарной теории множеств принято считать, что любые два множества сравнимы по мощности. Если X, Y — множества, то $|X| \leq |Y|$ или $|X| \geq |Y|$. Запись $|X| > |Y|$ означает, что $|X| \geq |Y|$ и $|X| \neq |Y|$.

2. Теорема Шредера-Бернштейна.

Теорема 1. Если $|X| \leq |Y|$ и $|X| \geq |Y|$, то $|X| = |Y|$.

Теорему примем без доказательства.

3. Теорема Кантора

Теорема 2. Пусть X — некоторое множество, $P(X)$ — множество подмножеств множества X ,

$$Y \in P(X) \Leftrightarrow Y \subset X. \quad (3)$$

Тогда $|P(X)| > |X|$.

► Допустим, $f: X \rightarrow P(X)$ — сюръекция. Рассмотрим множество

$$X_0 = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Поскольку f — сюръекция, то

$$\exists x_0 \in X \quad f(x_0) = X_0.$$

Принадлежит ли x_0 множеству X_0 ? Предположение $x_0 \in X_0$ приводит к выводу о том, что $x_0 \notin f(x_0) = X_0$. Получается противоречие, которое заставляет нас отвергнуть предположение. Но и предположение $x_0 \notin X_0 = f(x_0)$ ведет к противоречию, поскольку влечет за собой условие $x_0 \in X_0$. Сказанное означает, что отвергнуть мы должны условие сюръективности отображения f . ◀

Т.2 показывает, что не существует множества наибольшей мощности. Множество $P(X)$ подмножеств множества X , имеет большую мощность, чем множество X ,

$$|P(X)| > |X|.$$

Мощность множества $P(X)$ обозначают через $2^{|X|}$.

4. Конечные множества

Множество

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\} \quad (4)$$

называется отрезком натурального ряда.

Если $X \sim \mathbb{N}_n$, то множество X называется *конечным*.

Можно показать, что различные отрезки натурального ряда не равномощны между собой. Если $X \sim \mathbb{N}_n$, то n называется *числом элементов* множества X , $|X| = n$. Число элементов определено однозначно.

Пустое множество $\emptyset$ тоже считают конечным, $|\emptyset| = 0$.

Предложение. X конечно $\Leftrightarrow X$ не равномощно своей правильной части, то есть подмножеству, отличному от всего X .

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Так, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, бесконечно, функция

$f: n \rightarrow n+1$ является биекцией $\mathbb{N}$ на его правильную часть $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

5. Счетные множества

Определение. Множество X называется *счетным*, если $X \sim \mathbb{N}$. Если множество X счетно, то пишут $|X| = \aleph_0$ (алеф-0). Если $|X| \leq \aleph_0$, множество X называется *не более чем счетным*. Если $|X| > \aleph_0$, множество X называется *несчетным*.

Если множество X бесконечно, то для любого натурального n можно найти n различных элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ множества X , существует последовательность с попарно различными членами, состоящая из элементов множества X . Таким образом, всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество. Счетное множество — наименьшее среди бесконечных множеств.

Предложение.

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}. \quad (5)$$

► Биекцию $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ можно определить формулами

$$f(n) = 2n + 1 \text{ для } n \geq 0,$$

$$f(n) = -2n \text{ для } n < 0. \blacktriangleright$$

Предложение. Объединение конечного числа счетных множеств счетно.

Предложение.

$$\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}. \quad (6)$$

► Нумерацию элементов $\mathbb{N}^2$ можно провести по следующей схеме

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 6 & 10 \\ (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 9 \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 8 \\ (3, 1) & (3, 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7 \\ (4, 1) \end{array}$$

Предложение. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

► Каждое $q \in \mathbb{Q}$ единственным образом представляется несократимой дробью

$$q = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тем самым построено взаимно однозначное отображение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Получаем неравенство

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|.$$

Поскольку еще $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{N}|$, то $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, множество рациональных чисел счетно. ◀

6. Мощность континуума

Предложение.

$$\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N}). \quad (7)$$

► 1) Поставив каждому $x \in \mathbb{R}$ в соответствие подмножество $(-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел, мы получаем инъекцию $\mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{Q})$. Таким образом,

$$|\mathbb{R}| \leq |P(\mathbb{Q})| = |P(\mathbb{N})|.$$

2) Для того чтобы убедиться в справедливости противоположного неравенства, следует взаимно однозначно отобразить $P(\mathbb{N})$ в $\mathbb{R}$. Пусть $Y \subset \mathbb{N}$, положим

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in Y, \\ 0, & n \notin Y, \end{cases}$$

а в качестве $y = f(Y)$ возьмем вещественное число $y = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$

$$(y_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots).$$

Проведенное построение дает право сказать, что $|P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$. ◀

Определение. Если $X \sim P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, то X имеет *мощность континуума*, $|X| = 2^{\aleph_0} = c$.

Замечание. Невырожденный промежуток имеет ту же мощность, что и все множество вещественных чисел. Биекцию

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

можно, например, определить формулой

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

**Разработал доцент кафедры высшей
математики Моисеев А. А.**