



Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 03. Последовательности и их пределы

Лекция № 06. Понятия последовательности и предела, простейшие свойства

Учебные вопросы:

1. Понятие последовательности
2. Определение предела последовательности
3. Простейшие свойства предела последовательности

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. - (Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Понятие последовательности

1⁰. Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это функция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Значение этой функции обозначают через x_n и называют n -м членом последовательности.

Замечание. Бывает удобным нумеровать члены последовательности начиная с некоторого $p \in \mathbb{Z}$, рассматривать последовательности вида $\{x_n\}_{n=p}^{\infty}$.

2⁰. Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность. Множество

$$X = \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} u = x_n\} \quad (1)$$

называется *множеством значений* последовательности.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной*, если соответствующим свойством обладает множество ее значений:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists M \forall n \in \mathbb{N} x_n \leq M, \quad (2)$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists m \forall n \in \mathbb{N} x_n \geq m, \quad (3)$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M, m \forall n \in \mathbb{N} m \leq x_n \leq M. \quad (4)$$

Заметим, что

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M \forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq M. \quad (5)$$

Примеры. 1) $x_n = \frac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

2) $x_n = n^2$ ограничена снизу, но не является ограниченной сверху.

2. Определение предела последовательности

1⁰. Определение 1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, a — вещественное число. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного ε найдется такой номер N , что для всех натуральных n , больших N , выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Если a — предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то пишут

$$x_n \rightarrow a \text{ или } a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (2)$$

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*, не имеющая предела — *расходящейся*.

Примеры. 1) $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

► $\forall \varepsilon > 0$ положим $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, тогда если $n > N$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Сказанное означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. ◀

2) Последовательность $(-1)^{n-1}$ расходится.

2⁰. Определение. 1) Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Множество

$$V_{\varepsilon}(a) = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (3)$$

называется ε -окрестностью точки a .

2) Множество V называется окрестностью точки a , если оно содержит некоторую ε -окрестность:

$$\exists \varepsilon > 0 V_{\varepsilon}(a) \subset V. \quad (4)$$

3⁰. Определение 2. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, если

$$\forall V \exists N n > N \Rightarrow x_n \in V. \quad (5)$$

Здесь V — окрестность точки a .

Предложение Определения 1, 2 равносильны.

3. Простейшие свойства предела последовательности

1⁰. Стационарная последовательность.

Речь идет о последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой существует такой номер n_0 , что $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \dots = a$. Для этой последовательности $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

$$\blacktriangleright \forall \varepsilon > 0 \ N = n_0 \ n > N \Rightarrow x_n = a, |x_n - a| = 0 < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

2⁰. Единственность предела.

Предложение. Если последовательность имеет предел, то только один.

$\blacktriangleright$ Допустим, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ и $a \neq b$. Для определенности предположим,

что $a < b$. Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. По определению предела

$$\exists N_1 \ n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n - a < \varepsilon, x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2},$$

$$\exists N_2 \ n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon \Rightarrow x_n - b > -\varepsilon, x_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

Подберем n_0 , для которого $n_0 > N_1, n_0 > N_2$, получим взаимно

противоречивые неравенства

$$x_{n_0} < \frac{a+b}{2} \text{ и } x_{n_0} > \frac{a+b}{2}.$$

Полученное противоречие опровергает наше допущение. Последовательность имеет не более одного предела. $\blacktriangleright$

3⁰. Ограниченность сходящейся последовательности.

Предложение. Если последовательность сходится, то она ограничена.

► Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. По определению предела

$$\exists n_0 \ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1 \Rightarrow x_n < a + 1.$$

Положим $M = \max \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a + 1\}$. Теперь $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq M$ (если $n \leq n_0$, то неравенство прямо следует из определения числа M ; если $n > n_0$, то $x_n < a + 1 \leq M$). Последовательность ограничена сверху.

Ограниченность снизу устанавливается аналогично. ◀

4⁰. Подпоследовательность.

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая ($n_1 < n_2 < \dots$) последовательность натуральных чисел.

Построим новую последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, полагая $y_k = x_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Эта последовательность называется *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Примеры. 1) $y_k = x_{p+k}$ — подпоследовательность, полученная отбрасыванием нескольких первых членов исходной последовательности.

2) $y_k = x_{2k}$ — подпоследовательность, состоящая из членов исходной последовательности с четными номерами.

3) $y_k = x_{2k-1}$ — подпоследовательность, состоящая из членов исходной последовательности с нечетными номерами.

Теорема 1. Подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же пределу.

► По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Пусть $k > N$, тогда $n_k \geq k > N$, так что $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, т.е. $|y_k - a| < \varepsilon$. Сказанное означает, что $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$. ◀

Пример. $x_n = (-1)^{n-1}$, $y_k = x_{2k} = 1$, $z_k = x_{2k-1} = -1$. Последовательность $(-1)^{k-1}$ оказывается расходящейся, поскольку имеет подпоследовательности с разными пределами.

Упражнения. 1) Если $x_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$, $x_{2k-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$, то $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$.

2) $x_{p+k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$.

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.