



Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 03. Последовательности и их пределы

Лекция № 07. Связь сходимости с арифметическими операциями и порядком

Учебные вопросы:

1. Сходимость и арифметические операции
2. Сходимость и неравенства
3. Бесконечно малые последовательности

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. - (Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Сходимость и арифметические операции

Теорема 1. О пределе суммы

Предел суммы равен сумме пределов. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $z_n = x_n + y_n$. Тогда если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, то и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (1)$$

Теорема 2. О пределе произведения

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $z_n = x_n \cdot y_n$. Тогда если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, то и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (2)$$

► Положим $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Проведем предварительную оценку:

$$z_n - ab = x_n y_n - a y_n + a y_n - ab = (x_n - a) y_n + a(y_n - b).$$

Поэтому

$$|z_n - ab| \leq |x_n - a| |y_n| + |a| |y_n - b|.$$

Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, поэтому она ограничена, так что найдется такое число $M > 0$, что $|y_n| \leq M$ при всех n . Можно считать, что $|a| \leq M$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то

$$\exists N_1 \ n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Точно так же

$$\exists N_2 \quad n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Для $n > N$ получаем оценку

$$|z_n - ab| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Соотношение $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ доказано. ◀

Следствие. Предел линейной комбинации

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3)$$

Теорема 3. О пределе частного

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $\forall n \ y_n \neq 0$,

$$z_n = \frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}. \quad (4)$$

2. Сходимость и неравенства

Теорема 1. О стабилизации неравенств. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

$$a < b. \quad (1)$$

Тогда найдется такой номер n_0 , что

$$x_n < y_n \text{ для } n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (2)$$

► Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Поскольку $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то найдется такой номер n_1 ,

что $|x_n - a| < \varepsilon$ для $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$. Для таких n имеем

$$x_n - a < \varepsilon, x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

Поскольку $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, то найдется такой номер n_2 , что $|y_n - b| < \varepsilon$ для

$$n = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots. \text{ Для таких } n \text{ имеем } y_n - b > -\varepsilon, y_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. При $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ справедливы оба неравенства

$$x_n < \frac{a+b}{2}, y_n > \frac{a+b}{2},$$

из которых и следует неравенство $x_n < y_n$. ◀

Следствия 1) Если $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a < b$, то $x_n < b$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$.

2) Если $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 0$, то $x_n > 0$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$.

Теорема 2. О предельном переходе в неравенстве

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

Если

$$\forall n \ x_n \leq y_n, \tag{3}$$

то

$$a \leq b. \tag{4}$$

► Допустим, $a > b$. Тогда по теореме 1 $x_n > y_n$, начиная с некоторого номера, вопреки условию. ◀

Замечания. 1) Достаточно потребовать выполнения неравенства $x_n \leq y_n$, начиная с некоторого номера.

2) Теорема гарантирует только нестрогое неравенство. Может случиться, что $x_n < y_n$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Например, $\frac{1}{n} > 0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 3. О сжатой последовательности. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, связанные неравенством

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad (5)$$

и

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a. \quad (6)$$

Тогда

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a. \quad (7)$$

► Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \quad n > N \Rightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, & x_n > a - \varepsilon \\ |y_n - a| < \varepsilon, & y_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a. \quad \blacktriangleleft$$

6. Бесконечно малые последовательности

1⁰. Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой (б.м.)*, если $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon. \quad (1)$$

2⁰. Теорема 1. Сумма бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая, если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м., $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, то $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.

Теорема 1 — прямое следствие теоремы о пределе суммы.

3⁰. Теорема 2. Произведение б.м. на ограниченную — б.м. Если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м., а $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $\beta_n = x_n \alpha_n$, то $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.

► $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $\exists M > 0 \mid x_n \mid \leq M \ (n = 1, 2, \dots)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то найдется такой номер N , что

$$n > N \Rightarrow \mid \alpha_n \mid < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Теперь для $n > N$ получаем

$$\mid \beta_n \mid \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — б.м. } \blacktriangleleft$$

Следствия 1) Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.

2) Линейная комбинация бесконечно малых — бесконечно малая.

4⁰. Теорема 3. Описание сходимости в терминах б.м.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, а — вещественное число. Тогда

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow \alpha_n = x_n - a \text{ — б.м.} \quad (2)$$

5⁰. Бесконечно большие последовательности.

Определение. 1) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют бесконечно большой (б.б.) и пишут $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, если $\forall E > 0 \exists N \ n > N \Rightarrow \mid x_n \mid > E$.

2) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, если $\forall E > 0 \exists N \ n > N \Rightarrow x_n > E$.

3) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, если $\forall E > 0 \exists N \ n > N \Rightarrow x_n < -E$.

6⁰. Теорема 4. Связь б.м. и б.б.

1) Если $\alpha_n \neq 0$ — б.м., то $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ — б.б.

2) Если x_n — б.б., то $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ — б.м.

7⁰. Расширенное множество вещественных чисел.

Дополним $\mathbb{R}$ элементами $+\infty, -\infty$. $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется *расширенным множеством вещественных чисел*. Считаем, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Для неограниченного сверху множества E имеем $\sup E = +\infty$; для неограниченного снизу множества E имеем $\inf E = -\infty$.

Над бесконечными числами можно выполнять арифметические операции (с естественными ограничениями):

$$\begin{aligned} a + (\pm\infty) &= \pm\infty, a \in \mathbb{R}; (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty; \\ x \cdot \infty &= \infty, x \neq 0; \frac{a}{\infty} = 0, a \in \mathbb{R}; \frac{x}{0} = \infty, x \neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти равенства выражают теоремы об арифметических операциях над последовательностями с соответствующими свойствами. Например, равенство $a \cdot \infty = \infty, a \neq 0$ — символическая запись утверждения

$$x_n \rightarrow a \neq 0, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow z_n = x_n y_n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Условие $a \neq 0$ существенно; если $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty$, то поведение $z_n = x_n y_n$ зависит от более тонких свойств сомножителей. В связи с этим говорят, что выражение $0 \cdot \infty$ является неопределенностью.

Основные неопределенности описываются формулами

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}. \quad (6)$$

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.