ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 03. Последовательности и их пределы

Лекция № 08. Основные теоремы о сходящихся последовательностях

Учебные вопросы:

1. Сходимость монотонных последовательностей
2. Нижний и верхний пределы последовательности
3. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса
4. Критерий Коши

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с. (Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.- 2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва: Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-00101-039-5.

1. Сходимость монотонных последовательностей

1^0. Определение.

1) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots. \tag{1}$$

2) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \tag{2}$$

3) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *монотонной*, если она является возрастающей или убывающей.

1') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *строго возрастающей*, если

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots \ . \tag{1'}$$

2') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *строго убывающей*, если

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots \ . \tag{2'}$$

3') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *строго монотонной*, если она является строго возрастающей или строго убывающей.

2^0. Теорема 1. О сходимости монотонной последовательности

1) *Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *возрастает и ограничена сверху, то она сходится,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n. \tag{3}$$

2) *Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает и ограничена снизу, то она сходится*,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n. \tag{4}$$

▶2) Положим $m = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ и покажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} m$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такой номер n_0, что $x_{n_0} < m + \varepsilon$. Для любого $n \geq n_0$ выполнены неравенства

$$m \leq x_n \leq x_{n_0} < m + \varepsilon,$$

очевидным образом влекущие неравенство

$$|x_n - m| < \varepsilon. ◀$$

Дополнение. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и не ограничена сверху, то $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Всякая возрастающая последовательность имеет предел, может быть, равный $+\infty$. (Термин *сходящаяся* относится только к последовательностям с конечным пределом).

3^0. Теорема 2. О вложенных отрезках.

Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность вложенных отрезков:*

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \; (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

причем $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. *Тогда отрезки этой последовательности имеют общую точку и только одну. Символически это часто записывают так:*

$$\exists! c \in [a_n, b_n], \; n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

(Символ $\exists!$ означает существование и единственность).

▶ Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ концов отрезков. Первая из этих последовательностей возрастает, а вторая убывает, при этом $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Такие последовательности называются встречными. Первая последовательность ограничена сверху:

$$a_n \leq b_n \leq b_1.$$

По теореме 1 $\{a_n\}$ сходится. Положим $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Поскольку $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то и $b_n \underset{n\to\infty}{\to} c$. Справедливы неравенства $a_n \le c \le b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$.

Допустив, что наши отрезки содержат еще и точку $d \ne c$, например, $d > c$, мы увидим, что $b_n - a_n \ge d - c > 0$, вопреки условию $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.◄

Замечание. Существенно, что рассматривается последовательность **отрезков.** Последовательность интервалов может иметь пустое пересечение. Примером служит последовательность $\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

4^0. Число e.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{7}$$

Воспользовавшись биномиальной формулой, можем написать

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n},$$

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Соответственно для x_{n+1} получается выражение

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

При переходе от x_n к x_{n+1} все слагаемы увеличиваются и появляется дополнительное положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго возрастает.

Далее,

$$x_n \le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \le 2 + 1 = 3,$$

последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. По теореме 1 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Определение. Предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется числом e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \; e = 2.7182818284590452\ldots. \tag{8}$$

2. Нижний и верхний пределы последовательности

1^0. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Положим $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Тогда $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонные ограниченные последовательности.

Определение. Число $l = \lim_{n\to\infty} y_n$ называется *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается через $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Число $L = \lim_{n\to\infty} z_n$ называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается через $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Для неограниченных последовательностей можно ввести бесконечные верхний и нижний пределы.

Теорема1. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ограниченная последовательность. Для сходимости последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *необходимо и достаточно равенство верхнего и нижнего пределов:*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n \tag{1}$$

В случае сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

▶ 1) **Необходимость.** Пусть последовательность сходится, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполняются неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Если $n > N$, то $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $a - \varepsilon \le y_n \le z_n \le a + \varepsilon$. Сказанное означает, что $y_n, z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, число a выполняет роль как нижнего, так и верхнего предела.

2) **Достаточность.** Положим $a = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ и покажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Поскольку $y_n \le x_n \le z_n$, а $y_n, z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то по теореме о сжатой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.◀

3. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.

Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

▶Докажем более сильное утверждение. Существует подпоследовательность, сходящаяся к верхнему пределу последовательности.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, $L = \overline{\lim} x_n$. Построим подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} L$. Введем в рассмотрение последовательность $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \underset{n\to\infty}{\to} L$. Построение подпоследовательности проведем по индукции. Положим $n_1 = 1$. Подберем $n_2 > n_1$ так, чтобы $z_{n_1+1} - \dfrac{1}{2} < x_{n_2} \le z_{n_1+1}$. Вообще, $n_{k+1} > n_k$ подбираем так, чтобы $z_{n_k+1} - \dfrac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \le z_{n_k+1}$. Тем самым построена подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} L$. ◀

4. Критерий Коши

1^0. Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной* (*последовательностью Коши, сходящейся в себе*), если выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ |x_n - x_m| < \varepsilon . \tag{1}$$

Удобно записывать условие Коши и в несколько иной форме:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \ p = 1, 2, \ldots \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon . \tag{2}$$

Еще при выполнении условия Коши пишут

$$x_n - x_m \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 . \tag{3}$$

2^0. Теорема 1. Критерий Коши.

Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

▶ 1) **Необходимость.** Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon / 2$. Пусть $m, n > N$, тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ оказывается фундаментальной.

Необходимость легко получена из свойств расстояния и справедлива в любом пространстве, в котором определяется понятие сходимости. Достаточность же условия Коши есть новая форма свойства полноты.

2) **Достаточность.** Нет сомнения в том, что фундаментальная последовательность обязана быть ограниченной. Мы можем рассмотреть нижний и верхний пределы нашей последовательности. Воспользуемся еще раз последовательностями $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, с помощью которых определены нижний и верхний пределы. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию Коши можно подобрать номер N, такой что при $n, m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Пусть $n > N$, тогда элементы множества $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ удалены друг от друга на расстояние, меньшее ε, $z_n - y_n \le \varepsilon$. Мы приходим к равенству пределов l и L последовательностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, что означает сходимость нашей последовательности. ◀

Разработал доцент кафедры высшей математики Моисеев А. А.