



Раздел № 01 Введение в математический анализ

Тема № 04 Предел функции

Лекция № 09 Основные свойства предела функции

Учебные вопросы:

1. Понятие предела функции
2. Различные предельные конструкции
3. Простейшие свойства предела функции
4. Предел и арифметические операции
5. Предел и неравенства

Литература

1. Аксенов А. П. Математика. Математический анализ Ч. 1 : учеб. пособие
А. П. Аксенов — СПб.: Изд-во Политехн, ун-та, 2009. — 614 с.
(Математика в политехническом университете). ISBN 978-5-7422-2305-4
2. Зорич В. А. Математический анализ: Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и
спец. вузов/ В. А. Зорич.- 4-е изд., испр.-Москва: МЦНМО, 2002 Ч.1.-
2002.- 657 с. : ил.- Библиогр.: с.641-644. ISBN 5940570569
3. Тер-Крикоров А. М. Шабунин М. И. Курс математического анализа:
учебное пособие для вузов по направлению "Прикладная математика и
физика" / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. -7-е изд. -Москва:
Лаборатория знаний: [Лаборатория Пилот, 2017]. -672 с. : ил.; 22 см. -
(Математика).-Библиогр.: с. 664. -Предм. указ.: с. 665-669.ISBN 978-5-
00101-039-5.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие предела функции

1⁰. Предельная точка.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Точка a называется *предельной* для множества E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E \ 0 < |x - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

На языке окрестностей это означает, что любая окрестность V точки a содержит точки множества E , отличные от a .

Если V — окрестность точки a , то $\dot{V} = V \setminus \{a\}$ называют *проколотой окрестностью*.

2⁰. Определение предела функции.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множества E ; f — функция, определенная на E .

1) **Определение на языке $\varepsilon - \delta$.** Число A называется пределом функции f в точке a (или при $x \rightarrow a$) вдоль множества E , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется всякий раз, когда $x \in E$ и $0 < |x - a| < \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

2) **Определение на языке окрестностей.** Число A называется пределом функции f в точке a , если для любой окрестности V точки A существует окрестность U точки a , для которой справедливо включение $f(\dot{U} \cap E) \subset V$.

3) Определение на языке последовательностей. Число A называется пределом функции f в точке a , если для любой последовательности

$$\{x_n\}, x_n \in E, x_n \neq a, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ справедливо соотношение } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

Если A — предел функции f в точке a , то пишут

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in E} A \text{ или } A = \lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x).$$

Как правило, мы будем рассматривать ситуацию, в которой функция определена, по крайней мере, в некоторой проколотой окрестности точки a . В такой обстановке указание множества E становится необязательным, мы пишем просто $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Пример. Для существования предела функция вовсе не обязана быть определенной в точке a . Если же в этой точке функция определена, то значение $f(a)$ не влияет на предел. Если $f(x) = 1$ при $x \neq 3$, а $f(3) = 2$, то $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \neq f(3)$.

Существование и значение предела полностью определяется поведением функции в любой проколотой окрестности точки a . Если функции f, g совпадают в некоторой проколотой окрестности U точки a , то они имеют или не имеют предела одновременно, в случае существования пределы между собой равны. Свойства такого типа называют локальными.

3⁰. Теорема 1 (Равносильность определений). *Определения 1), 2), 3) равносильны. Если $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ в смысле одного из определений, то*

$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и в смысле других определений.

2. Различные предельные конструкции

1⁰. Односторонние пределы.

Определение. 1) Пусть f определена на некотором интервале $(a - \delta_0, a)$. Число A называют *левосторонним пределом* функции f в точке a и пишут $A = f(a - 0)$, $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, $f(x) \rightarrow A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

2) Пусть f определена на некотором интервале $(a, a + \delta_0)$. Число A называют *правосторонним пределом* функции f в точке a и пишут $A = f(a + 0)$, $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $f(x) \rightarrow A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

Определения односторонних пределов можно дать и в терминах окрестностей или последовательностей.

Предложение. Функция f определена в проколотой окрестности точки a . Тогда функция имеет предел в точке a в том и только в том случае, если существуют и равны между собой односторонние пределы $f(a - 0) = f(a + 0)$. В случае существования предела

$$f(a - 0) = f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

2⁰. Бесконечные пределы.

В определении предела число A можно заменить на $+\infty, -\infty, \infty$. Например,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \delta > 0 \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -E.$$

3⁰. Пределы на бесконечности.

Бесконечности могут выполнять и роль точки, в которой вычисляется предел. Например,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \Delta > 0 \ x > \Delta \Rightarrow |f(x)| > E.$$

3. Простейшие свойства предела функции

1⁰. Если функция постоянна в некоторой проколотой окрестности точки a , $f(x) = A$ при $x \in \dot{V}$, то $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$.

2⁰. Предел единствен.

3⁰. Если функция имеет конечный предел, то она локально ограничена, т. е. ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a .

4. Предел и арифметические операции

Теорема 1. Пусть функции f , g определены в проколотой окрестности E точки a .

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B. \quad (1)$$

Определим функции

$$\begin{aligned} F : F(x) &= f(x) + g(x), \ x \in E; \\ G : G(x) &= f(x)g(x), \ x \in E; \\ H : H(x) &= f(x)/g(x), \ x \in E. \end{aligned} \quad (2)$$

(В последнем случае предполагаем, что $g(x) \neq 0$ при $x \in E$).

Тогда функции F , G , H тоже имеют пределы,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A + B, \ G(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} AB, \ H(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A / B \quad (3)$$

(последнее при условии $B \neq 0$).

► Докажем , например, последнее утверждение. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in E$, $x_n \neq a$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. По определению предела функции на языке последовательностей

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A, \quad g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B.$$

По теореме о пределе отношения последовательностей $H(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{A}{B}$. Опять по определению предела функции $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{A}{B}$. ◀

5. Предел и неравенства

Теорема 1. Пусть функции f , g определены в проколотой окрестности E точки a .

1) Стабилизация неравенств. Пусть

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B, \quad A < B. \quad (1)$$

Тогда

$$\exists U \forall x \in \dot{U} \quad f(x) < g(x) \quad (2)$$

2) Предельный переход в неравенстве. Пусть

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq g(x), \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B. \quad (3)$$

Тогда

$$A \leq B. \quad (4)$$

Замечание. Можно ослабить условие и потребовать выполнения неравенства $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a .

3) Теорема о сжатой функции. Если

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \quad (5)$$

то

$$h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A. \quad (6)$$

► 1) Рассмотрим окрестности $V_A = \left(-\infty, \frac{A+B}{2}\right)$ и $V_B = \left(\frac{A+B}{2}, +\infty\right)$ точек

A и B соответственно. На основании определения предела мы можем найти такую окрестность U точки a , что при $x \in U$ справедливы включения $f(x) \in V_A$ и $g(x) \in V_B$. U — искомая окрестность.

2) Утверждение о предельном переходе в неравенстве доказывается, как и в случае последовательностей, методом от противного. Допустив, что имеет место неравенство $A > B$, мы придем к противоречащему условию выводу о том, что в пределах некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > g(x)$.

3) Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. По определению предела функции на языке последовательностей получаем соотношения $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, а по условию

$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. По теореме о сжатой последовательности $h(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$. Пользуясь опять определением на языке последовательностей, делаем вывод, что $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$. ◀

**Разработал доцент кафедры высшей
математики Моисеев А. А.**