ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 01. Элементы теории множеств и математической логики

Практическое занятие № 01. Элементы комбинаторики и бином Ньютона

Учебные вопросы

1. Сочетания.
2. Бином Ньютона.
3. Свойства биномиальных коэффициентов.

Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. Москва : АСТ : Астрель, 2002. 558 с. : ил., табл. ; 22 см. ISBN 5-17-010062-0 (АСТ) . ISBN 5-271-03601-4 (Астрель).
2. Сборник задач по математическому анализу : [учебное пособие] / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; [под ред. Л. Д. Кудрявцева]. Изд. 2-е, перераб. и доп. Москва : Физматлит, 2003. ISBN 5922103059. Т.1: Предел; Непрерывность; Дифференцируемость. 2003. 495 с. : ил. ; 22 см. ISBN 5922103067.

Справочные сведения

1. Сочетанием называется каждое k-элементное подмножество n - элементного множества. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ или } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

2. Для любых чисел a и b и любого $n \in \mathrm{N}$ справедлива формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

Решение задач

Задача 1. Докажите свойства биномиальных коэффициентов

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, $k = 1, 2, \ldots n$.

Решение. 1) $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\left(n-(n-k)\right)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$.

2) $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!\left(n-(k-1)\right)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k+1}\right) =$

$= \dfrac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!k(n+1-k)} = C_{n+1}^k$.

Задача 2. Докажите равенства

1) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots C_n^n = 2^n$,

2) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots (-1)^n C_n^n = 0$.

Решение. 1) Положим в формуле бинома $a = 1, \quad b = 1$:

$(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$, т.е. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots C_n^n = 2^n$.

2) Теперь пусть: $a = 1, \quad b = -1$: $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$, т.е.

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 3. Докажите равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

Решение. 1) Положим в формуле бинома $a = x, \quad b = 1$: $(x+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Продифференцируем равенство: $n(x+1)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$.

Пусть теперь $x = 1$, тогда $n2^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k$.

2) После преобразования

$C_n^k k = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!\left(n-1-(k-1)\right)!} = nC_{n-1}^{k-1}$

получается, что $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} = n2^{n-1}$.

Задача 4. Найдите член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

Решение. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \left(\sqrt{x}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16-k} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{\frac{k}{2}-\frac{16-k}{3}}$,

$x^{\frac{k}{2}-\frac{16-k}{3}} = x^3$, $\frac{k}{2}-\frac{16-k}{3} = 3$ при $k=10$.

Член разложения, содержащий x^3, имеет вид : $C_{16}^{10}x^3 = 8008x^3$.

Задачи для самостоятельного решения

Докажите равенства

1) $\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k} = 2^{2n-1}-1$; **2)** $\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} = 2^{2n-1}$; **3)** $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

4) Найдите коэффициент при a^5 в разложении $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^p$, если сумма всех коэффициентов равна 128.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.