



ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 02. Последовательности и их пределы

Практическое занятие № 02. Доказательства некоторых равенств и
неравенств методом математической индукции

Учебные вопросы

1. Метод математической индукции.
2. Доказательство бинома Ньютона.
3. Абсолютная величина вещественного числа.

Номера задач (1., 2., и т.д.) из Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Решения

Задача 1 ([1], №2). Докажите равенство с помощью метода математической индукции:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Обозначим $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

1) Проверим, что $S_1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$: $S_1 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

2) Предположим, что для какого-то значения $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Покажем, что тогда $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$, т. е.

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$$\text{Имеем, } S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) =$$

$$= (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) = (n+1) \left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \right).$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 2 ([1], №7). Докажите, что если $x > -1$, то справедливо неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Решение. 1) При $n=2$ неравенство выполняется: $(1+x)^2 \geq 1+2x$.

2) Пусть $(1+x)^n \geq 1+nx$ верно для какого-то натурального значения $n > 1$,

тогда $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx) \cdot (1+x)$, т. е. $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$;

$nx^2 \geq 0$, значит, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Доказано неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n > 1$, если $x > -1$.

Задача 3. Докажите бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ с помощью метода математической индукции.

Решение. 1) Проверим, что $a+b = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k}$:

$$\sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = b+a \text{ — верно.}$$

2) Предположим, что $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ — верно для какого-то натурального

значения n , покажем, что тогда $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = a \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k}.$$

$$\text{Так как } \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k},$$

$$\text{то } \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} b^0 + C_n^0 a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.$$

$$\text{Таким образом, } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 4 ([1], №9.б)). Докажите, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Решение. 1) Если $n = 1$, то неравенство выполняется: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) Предположим, что для какого-то значения $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Покажем, что тогда $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

По предположению $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ – верное неравенство, умножая

которое на $\frac{2n+1}{2(n+1)}$ – положительную дробь, получаем верное неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Осталось доказать, что $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

Последнее неравенство равносильно следующему: $\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} < 2n+2$,

возводим в квадрат: $4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$ – верное неравенство.

Тем самым, индукционный переход доказан, а значит,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 5. Решите неравенства **1)** $|x-4| < 2$, **2)** $|x-2| > |x+1|$, **3)** $|x-1| + |x-3| > 5$.

Решение. 1) $|x-4| < 2$. Расстояние от точки с координатой x до точки с координатой 4 меньше 2. Заметим, что при $x = 2$ и при $x = 6$ расстояние равно 2. Значит, при $2 < x < 6$ искомое расстояние меньше 2.

Или: $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6$.

2) $|x-2| > |x+1|$: расстояние от точки с координатой x до точки с координатой 2 больше расстояния от точки с координатой x до точки с координатой (-1).

Заметим, что при $x = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ эти расстояния равны. Значит, при $x < \frac{1}{2}$ расстояние до 2 больше расстояния до (-1).

Или: $|x-2| > |x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3 > 6x \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

3) $|x-1| + |x-3| > 5$: сумма расстояний от точки с координатой x до точки с координатой 1 и от x до точки с координатой 3 больше 5. Заметим, что при $1 \leq x \leq 3$ сумма этих расстояний равно 2 – длине этого отрезка. При $x < 1$ сумма расстояний равна $1-x+3-x=4-2x$. Неравенство выполняется, если $4-2x > 5$, то есть при $x < -\frac{1}{2}$. Если же $x > 3$, то сумма расстояний равна

$x-1+x-3=2x-4$. Неравенство выполняется, если $2x-4 > 5$, то есть при $x > \frac{9}{2}$.

Ответ: $x < -\frac{1}{2}$ или $x > \frac{9}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Докажите равенства: **3.** $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$, **4.** $1+2+2^2+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1$.

Докажите неравенства: **9. а)** $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$ ($n > 1$),

10. б) $n^{n+1} > (n+1)^n$ ($n \geq 3$), **10. в)** $\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$, $0 \leq x_k \leq \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Решите неравенства: **23.** $|x-2| \geq 10$, **24.** $|x| > |x+1|$, **28.** $|x+1| - |x-1| < 1$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.