ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 02. Последовательности и их пределы

Практическое занятие № 03. Теория числовых последовательностей

Учебные вопросы

1. Понятие предела последовательности.
2. Вычисление пределов последовательностей.
3. Супремум, инфимум, верхний и нижний пределы последовательности.

Определение предела последовательности

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Решения

Задача 1. Докажите, что $\frac{n+1}{3n+2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}$.

Решение. По определению предела последовательности $\frac{n+1}{3n+2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}$ означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \in \mathrm{N}$ выполняется $\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

Рассмотрим $\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3n+2}\right| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n}$.

Неравенство $\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\frac{1}{3n} < \varepsilon$, то есть при $n > \frac{1}{3\varepsilon}$.

В качестве N нужно взять какое-либо натуральное число, удовлетворяющее условию $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Например, $N = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1$.

Тогда $\forall n > N$, а значит, $n > \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{3\varepsilon}$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n} < \varepsilon.$$

Что означает, что $\frac{n+1}{3n+2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}$.

Задача 2. Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Решение. Так как $a^n = \left((a-1)+1\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (a-1)^k > C_n^2 (a-1)^2$, то $\frac{n}{a^n} < \frac{n}{C_n^2 (a-1)^2}$,

то есть $0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$ при $n>1$. Поскольку последовательность

$\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$ – бесконечно малая, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

Задача 3 ([1], №65). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N$ выполняется $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$, так как $\sqrt[n]{n}\geq 1$ для натуральных значений n.

$1\leq\sqrt[n]{n}<\varepsilon+1$ или $1\leq n<(1+\varepsilon)^n$.

Тогда $\sqrt[n]{n}<\varepsilon+1\Leftrightarrow\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$.

Из предыдущего примера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0, a>1$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$.

$\exists N_1:\forall n>N_1$ выполняется $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$, то есть $n<(1+\varepsilon)^n$.

Следовательно, достаточно выбрать $N=N_1$, чтобы при этом ε выполнялось $1\leq n<(1+\varepsilon)^n$, а, значит, и $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$.

Задача 4. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)$.

Решение. $\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}=\frac{(n+2)(n+1)-n(n-1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2-n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=2.$$

Задача 5. Найдите супремум, инфимум, верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \dfrac{3n \cdot \cos(\pi n)}{3n-2}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательные последовательности:

$x_n^{(1)} = -1 - \dfrac{2}{3n-2}$ и $x_n^{(2)} = \dfrac{3n}{3n-2} = 1 + \dfrac{2}{3n-2}$.

$x_n = x_n^{(1)}$ при нечетном n, $x_n = x_n^{(2)}$ при четном n.

$\left\{x_n^{(1)}\right\}$ – возрастающая, значит, $-3 = x_1^{(1)} \le x_n^{(1)}$; $-3 = x_1 \le x_{2k-1} = x_{2k-1}^{(1)}$.

$\left\{x_n^{(2)}\right\}$ – убывающая, значит, $x_n^{(2)} \le x_1^{(2)} = 3$; $x_{2k}^{(2)} = x_{2k} \le x_2 = \dfrac{3}{2}$.

$\forall n \;\; x_n^{(1)} \le x_n^{(2)}$, $\forall k \;\; -3 \le x_{2k-1} \le x_{2k} \le \dfrac{3}{2}$;

$\sup x_n = \max x_n = x_2 = \dfrac{3}{2}$, $\inf x_n = \min x_n = x_1 = -3$.

Далее: $x_n^{(1)} = -1 - \dfrac{2}{3n-2} \underset{n\to\infty}{\to} -1$ и $x_n^{(2)} = \dfrac{3n}{3n-2} = 1 + \dfrac{2}{3n-2} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

$\forall n \;\; x_n^{(1)} \le x_n \le x_n^{(2)}$, $x_n = x_n^{(1)}$ при нечетном n, $x_n = x_n^{(2)}$ при четном n.

Поэтому $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = -1$. А поскольку $x_{2k-1} = x_{2k-1}^{(1)} \underset{k\to\infty}{\to} -1$, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Верхний предел вычисляется аналогичным способом: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Докажите, что x_n — бесконечно малая последовательность ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если

42. а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, **в)** $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$.

60. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \ (a>1)$. **61.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

62. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \ \left(|q|<1\right)$. **63.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \left(a>0\right)$.

Найдите пределы следующих последовательностей:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1}$. **47.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. **51.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$.

Для последовательности $\{x_n\}$, $n=1,2,...$ найдите $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$:

102. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, **108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.