Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 04. Предел функции

Практическое занятие № 04. Вычисление пределов функций

Учебные вопросы

1. Определение области существования функций.
2. Понятие предела функции.
3. Вычисление пределов функций.

Определение предела функции

$f(x)\underset{x\to a}{\to} A,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0(\forall x\in D_f: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

$f(x)\underset{x\to a}{\to}\infty,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если $\forall E>0\ \exists\delta>0(\forall x\in D_f: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E)$.

Решения

Задача 1. Найдите область существования функции $f(x)=\arccos\frac{2x-1}{x+1}+\lg(\lg x)$.

Решение. Область существования определяется системой неравенств

$\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|\le 1\\ \lg x>0\\ x>0\end{cases}$. Равносильная система: $\begin{cases}|2x-1|\le x+1\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\le 2$.

$D_f=(1;2]$.

Задача 2. Докажите, что **1)** $\lim\limits_{x\to1}\sin x=\sin 1$, **2)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{3}$, **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x+5}=0$,

4) $\lim\limits_{x\to-2{,}5}\frac{1}{2x+5}=\infty$.

Решение. 1) Нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to1}\sin x=\sin 1$, то есть

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0(\forall x: 0<|x-1|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin 1|<\varepsilon)$.

$$|\sin x-\sin 1|=2\left|\sin\frac{x-1}{2}\cdot\cos\frac{x-1}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-1}{2}\right|\le 2\cdot\left|\frac{x-1}{2}\right|<\delta,$$

неравенство $|\sin x-\sin 1|<\varepsilon$ выполняется при $\delta=\varepsilon$.

Использовано неравенство $|\sin x|\le|x|$, имеющее место при всех значениях x.

2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{3}$ означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0(\forall x: 0<|x+1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon)$.

$$\left|\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3-2x-5}{2x+5}\right|=2\left|\frac{x+1}{2(x+1)+3}\right|<\frac{2\delta}{3-2\delta}$$; при $\frac{2\delta}{3-2\delta}=\varepsilon$, то есть $\delta=\frac{3\varepsilon}{2(\varepsilon+1)}$,

неравенство $\left|\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ выполняется, если только $3-2\delta>0$, то есть $\delta<\frac{3}{2}$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\min\left(\frac{3\varepsilon}{2(\varepsilon+1)},\frac{3}{2}\right)(\forall x:0<|x+1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon).$$

Здесь δ можно выбрать любым из интервала $\left(0;\frac{3\varepsilon}{2(\varepsilon+1)}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x+5}=0$, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0(\forall x:|x|>\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{2x+5}\right|<\varepsilon)$.

$\left|\frac{1}{2x+5}\right|\le\frac{1}{2|x|-5}<\frac{1}{2\delta-5}$; при $\frac{1}{2\delta-5}=\varepsilon$, то есть $\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+5\right)$, неравенство $\left|\frac{1}{2x+5}\right|<\varepsilon$ выполняется.

Здесь использовано одно из неравенств для модуля: модуль суммы двух величин больше или равен модуля разности модулей этих величин.

На самом деле, δ можно выбрать любым, таким, что: $\delta>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+5\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to-2,5}\frac{1}{2x+5}=\infty$, означает, что $\forall E>0\ \exists\delta>0(\forall x:0<\left|x+\frac{5}{2}\right|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{2x+5}\right|>E)$.

$\left|\frac{1}{2x+5}\right|=\frac{1}{2\left|x+\frac{5}{2}\right|}>\frac{1}{2\delta}$; при $\delta=\frac{1}{2E}$ неравенство $\left|\frac{1}{2x+5}\right|>E$ выполняется.

Задача 3. Вычислите $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$, $n,k\in N$.

Решение.

$$x^{n+1}=((x-1)+1)^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m(x-1)^m=1+(n+1)(x-1)+C_{n+1}^2(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right),x\to1.$$

$$x^{k+1}=\left(\left(x-1\right)+1\right)^{k+1}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^{m}\left(x-1\right)^{m}=1+\left(k+1\right)\left(x-1\right)+C_{k+1}^{2}\left(x-1\right)^{2}+o\left(\left(x-1\right)^{2}\right),\, x\to 1\,.$$

$$x^{k}=1+k\left(x-1\right)+C_{k}^{2}\left(x-1\right)^{2}+o\left(\left(x-1\right)^{2}\right),\, x\to 1\,.$$

$$x^{n+1}-x^{k+1}=\left(n-k\right)\left(x-1\right)+\left(C_{n+1}^{2}-C_{k+1}^{2}\right)\left(x-1\right)^{2}+o\left(\left(x-1\right)^{2}\right),$$

$$\frac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^{k}-nx+n-1}{\left(x-1\right)^{2}}=\frac{1+n\left(x-1\right)+\left(C_{n+1}^{2}-C_{k+1}^{2}+C_{k}^{2}\right)\left(x-1\right)^{2}-n\left(x-1\right)-1+o\left(\left(x-1\right)^{2}\right)}{\left(x-1\right)^{2}}\,.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^{k}-nx+n-1}{\left(x-1\right)^{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(C_{n+1}^{2}-C_{k+1}^{2}+C_{k}^{2}\right)\left(x-1\right)^{2}+o\left(\left(x-1\right)^{2}\right)}{\left(x-1\right)^{2}}=C_{n+1}^{2}-C_{k+1}^{2}+C_{k}^{2}\,.$$

Ответ: $C_{n+1}^{2}-C_{k+1}^{2}+C_{k}^{2}=C_{n+1}^{2}-k$.

Задача 4. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}\cdot\sqrt[5]{1+15x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

Решение. $\sqrt{1+3x}=1+\dfrac{1}{2}3x+o\left(x\right)$, $\sqrt[5]{1+15x}=1+\dfrac{1}{5}15x+o\left(x\right)$, $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{1}{3}x+o\left(x\right)$,

$$\sqrt{1+3x}\cdot\sqrt[5]{1+15x}-\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{3}{2}x+3x+o\left(x\right)-1-\frac{1}{3}x+o\left(x\right)=\frac{25}{6}x+o\left(x\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}\cdot\sqrt[5]{1+15x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25}{6}x+o\left(x\right)}{x}=\frac{25}{6}\,.$$

Задача 5. Вычислите $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos x\cos 5x}{1+\cos x}$.

Решение. Замена $t=x-\pi$. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos x\cos 5x}{1+\cos x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t\cos 5t}{1-\cos t}$.

$1-\cos t\sim\dfrac{1}{2}t^{2}$ при $t\to 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t\cos 5t}{1-\cos t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t\cos 5t}{t^{2}/2}$.

$\cos t=1-\dfrac{t^{2}}{2}+o\left(t^{2}\right)$, $\cos 5t=1-\dfrac{1}{2}25+o\left(t^{2}\right)$, $\cos t\cos 5t=1-13t^{2}+o\left(t^{2}\right)$ при $t\to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t\cos 5t}{1-\cos t}=2\lim_{t\to 0}\frac{13t^{2}+o\left(t^{2}\right)}{t^{2}}=26.$$

Задачи для самостоятельного решения

Определите области существования функций:

156. $y = \sqrt{\cos\left(x^2\right)}$, **163.** $y = \operatorname{ctg}\left(\pi x\right) + \arccos 2^x$.

401. С помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений докажите, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

402. На языке «$E - \delta$» рассуждений докажите, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\left(1 - x\right)^2} = +\infty$.

Сформулируйте на языке «$\varepsilon - \delta$» (**403-406**):

1) $\lim\limits_{x \to a+0} f\left(x\right) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a-0} f\left(x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a-0} f\left(x\right) = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty$.

Вычислите пределы функций:

412. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right) - 1}{x}$, **419.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$,

425. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, **443.** $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$, **450.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \dfrac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \dfrac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}}$,

451. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - \left(1 + x\right)}$, **457.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\left(x + a\right)\left(x + b\right)} - x\right)$,

476. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, **477.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$,

480. $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 - x\right) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$, **482.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$, **490.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\left(a + 2x\right) - 2\operatorname{tg}\left(x + a\right) + \operatorname{tg} a}{x^2}$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.