

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 04. Предел функции

Практическое занятие № 05. Нахождение пределов функций

Учебные вопросы

1. Сравнение функций.
2. Нахождение пределов функций с использованием эквивалентных функций.

Краткие теоретические сведения

Пусть функции α , β определены в некоторой проколотой окрестности точки a , β не обращается в 0 ни в одной точке.

1) Говорят что α , β одного порядка при $x \rightarrow a$, если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A \neq 0, \infty$.

Для бесконечно малых функций α , β в этом случае говорят, что функция α и β одного порядка малости.

2) α , β эквивалентны при $x \rightarrow a$, $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$, если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

3) Функция α называется бесконечно малой по сравнению с β ,

$$\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\beta(x))$$

(α есть о-малое от β), если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Для бесконечно малых функций α , β в этом случае говорят, что функция α имеет более высокий порядок малости, чем β .

4) $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\beta(x))$, если $\frac{\alpha}{\beta}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки a .

5) Если $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} A(\beta(x))^k$, то говорят, что α имеет k -й порядок относительно β .

6) Если $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} A(x-a)^k$, то α имеет k -й порядок малости, функция $A(x-a)^k$ называется главной частью б.м. α . (Для случая $x \rightarrow \infty$ роль основной б.м. выполняет функция $\frac{1}{x}$, функция $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{A}{x^k}$ имеет k -й порядок малости, имеет $\frac{A}{x^k}$ своей главной частью).

Решения

Задача 1. Докажите, что $x^{3/2} + \sin^2 x = o(x)$.

Решение. Для доказательства нужно проверить, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2} + \sin^2 x}{x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2} + \sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^{3/2}}{x} + \frac{\sin^2 x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = 0.$$

Задача 2 ([1], №651.г)). Докажите, что $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Решение. Для доказательства нужно проверить, что отношение

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \text{ ограничено в некоторой окрестности бесконечности } (+\infty),$$

то есть, что $\left| \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \right| \leq C$ при $x > \delta > 0$.

$$\left| \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \right| = \frac{x^2}{1+x^2} |\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Задача 3 ([1], №650.д)). Докажите, что: $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt[8]{x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{3/4} + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{3/4} + \sqrt{\sqrt{x} + 1}} = 1,$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt[8]{x}.$$

Задача 4 ([1], №651.ж)). Докажите, что: $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}} = 1.$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}.$$

Задача 5 ([1], №653.г)). Пусть $x \rightarrow 0$. Выделите главный член вида Cx^n (C – постоянная) и определите порядок малости относительно переменной x функции $(\operatorname{tg} x - \sin x)$.

Решение. $\operatorname{tg} x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x (1 - \cos x) \frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \cdot \frac{x^2}{2} \cdot 1 = \frac{x^3}{2}$.

Задача 6. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{tg} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)$ является бесконечно малой. Выделите главную часть этой последовательности.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{tg} \left(\frac{n}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n+2}} \left(\frac{n}{n^2+1} \right) = 0$,

x_n – бесконечно малая последовательность.

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n+2}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{n}{n^2+1} \right) \sim \frac{n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \left(\frac{n}{n^2+1} \right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Задача 7 ([1], №504). Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

Решение. $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$

$$\sqrt{\cos 2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2} 2x^2 + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt[3]{\cos 3x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt[3]{1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9x^2}{2} + o(x^2) = 1 - \frac{3}{2} x^2 + o(x^2),$$

$$1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(1 - x^2 + o(x^2) \right) \left(1 - \frac{3}{2} x^2 + o(x^2) \right),$$

$$1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(1 - x^2 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) + o(x^2) \right) = 3x^2 + o(x^2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{x^2} = 3.$$

Задача 8. Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 3} \right)^x$.

Решение. $\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 3} \right)^x = e^{x \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 3} \right)}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{-4x - 2}{x^2 + 5x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{-4x - 2}{x^2 + 5x + 3} \right) = -4,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 3} \right)^x = e^{-4}.$$

Задача 9 ([1], №557). Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b, c > 0$).

$$\left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right) \right).$$

$$\ln \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1,$$

$$\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 = \frac{a^{x+1} - a + b^{x+1} - b + c^{x+1} - c}{a + b + c} = \frac{a(a^x - 1) + b(b^x - 1) + c(c^x - 1)}{a + b + c}.$$

$$a(a^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} a(x \ln a + o(x)),$$

$$\frac{a(a^x - 1) + b(b^x - 1) + c(c^x - 1)}{a + b + c} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(a \ln a + b \ln b + c \ln c)x + o(x)}{a + b + c}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a \ln a + b \ln b + c \ln c)x + o(x)}{x(a + b + c)} = \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{a + b + c}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left(\frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{a + b + c} \right) = {}^{a+b+c}\sqrt{a^a b^b c^c}.$$

Задача 10. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x^2-1}}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}}{\cos(\pi x/2)}$.

Решение. Замена $t = x - 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}}{\cos(\pi x/2)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t^2+2t} - \frac{1}{\sqrt{1+2t}}}{-\sin(\pi t/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t+t^2} (1+t)^{-3} - (1+2t)^{-1/2}}{-(\pi t/2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+2t+o(t))(1-3t+o(t)) - \left(1 - \frac{1}{2}2t+o(t)\right)}{-(\pi t/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-t+o(t) - (1-t+o(t))}{-(\pi t/2)} = 0. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

650. в) Докажите, что $x \sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(|x|)$.

651. з) Докажите, что $x^2 + x \ln^{100} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

653. в) Пусть $x \rightarrow 0$. Выделите главный член вида Cx^n (C – постоянная) и определите порядок малости относительно переменной x функции $(\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x})$.

655. б) Пусть $x \rightarrow 1$. Выделите главный член вида $C(x-1)^n$ (C – постоянная) и определите порядок малости относительно бесконечно малой $(x-1)$ функции $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

Вычислите пределы функций:

459. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$, **463.** $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3}((x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3})$,

495. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}$, **503.** $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$,

507. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$, **512.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$, **514.** $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$, **518.** $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$,

521. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, **522.** $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}, 542. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0), 547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} \quad (a \neq b),$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad (x > 0), 555. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a, b > 0), 562. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right),$$

$$567. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}, 571. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}, 589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right),$$

$$592. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right), 592. \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{e^{x^2}}{x^3} - \frac{e^4}{x+6}}{\cos \pi x / 4}; \text{ ответ: } -\frac{21e^4}{16\pi}, \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt[3]{x+7}}{x^3} - \frac{4x-2}{\sqrt{2x-1}}}{\cos(\pi x / 2)}; \text{ ответ: } \frac{95}{6\pi}.$$

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.