

Раздел № 01. Введение в математический анализ

Тема № 05. Непрерывные функции

Практическое занятие № 06. Исследование функций на
непрерывность

Учебные вопросы

1. Исследование функций на непрерывность.
2. Определение точек разрыва функций и исследование характера разрыва.

Определение функции, непрерывной в точке

Пусть f – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Функция f называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Решения

Задача 1 ([1], №667). Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдите максимальное $\delta > 0$ такое, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 5$.

Решение. Пусть $|x - 5| < \delta$, оценим $|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{5} \right|$.

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{x - 5}{5x} \right| = \frac{|x - 5|}{5|x|} = \frac{|x - 5|}{5|x - 5 + 5|} \leq \frac{|x - 5|}{5(5 - |x - 5|)} < \frac{\delta}{25 - 5\delta}. \text{ Значит, если } \frac{\delta}{25 - 5\delta} = \varepsilon, \text{ то}$$

неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется. То есть $\delta = \frac{25\varepsilon}{1 + 5\varepsilon}$. Заметим, что

$$\delta = \frac{25\varepsilon}{1 + 5\varepsilon} < 5, \text{ так как } \varepsilon > 0.$$

Задача 2 ([1], №674. ж)). С помощью « $\varepsilon - \delta$ » рассуждений докажите непрерывность функции $\cos x$.

Решение. Необходимо показать, что $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ для $\forall a \in \mathbb{R}$. То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x |x - a| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos a| < \varepsilon.$$

Так как $|\cos x - \cos a| = \left| 2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x - a| < \delta$, то при $\delta = \varepsilon$ из

того, что $|x - a| < \delta$ следует $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$, значит, $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ для $\forall a \in \mathbb{R}$.

Задача 3 ([1], №678). Исследуйте на непрерывность и постройте графики:

а) $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, **б)** $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$.

Решение. а) Функция $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ непрерывна во всех точках вещественной оси, кроме точки 0, как отношение и суперпозиция непрерывных функций.

Так как $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $x = 0$ – точка разрыва первого рода (устранимого).

$f(x)$ – четная функция, $x = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$ – нули функции. Точки $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$

лежат на графике функции $y = \frac{1}{|x|}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то есть ось абсцисс – горизонтальная асимптота. График

функции:

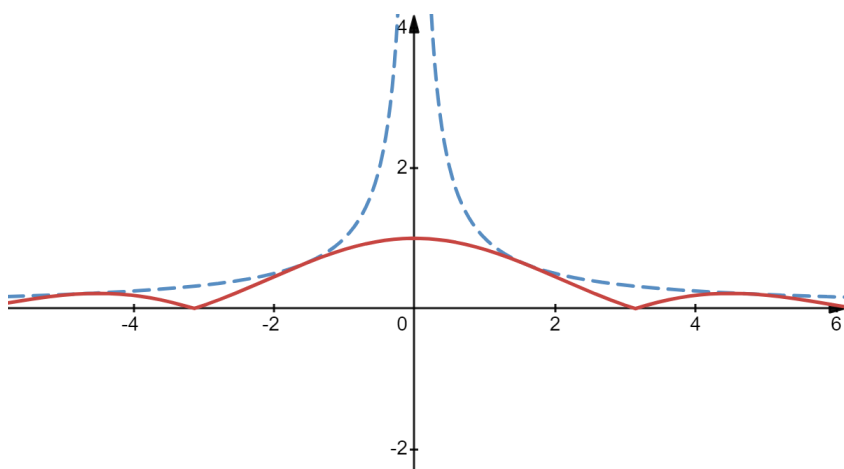


Рис. 1. График функции $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$.

б) Функция $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ непрерывна во всех точках вещественной оси, кроме точки 0, как отношение непрерывных функций.

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{-x} = -1$, $x = 0$ – точка разрыва первого

рода. Скачок величины $1 - (-1) = 2$.

$f(x)$ – нечетная функция, $x = \pi k, k \in \mathbb{N}$ – нули функции. Точки $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{N}$ лежат на графике функции $y = \frac{1}{|x|}$ (синий пунктир). Точки $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{N}$ лежат на графике функции $y = -\frac{1}{|x|}$ (зеленый пунктир).

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то есть ось абсцисс – горизонтальная асимптота. График

функции:

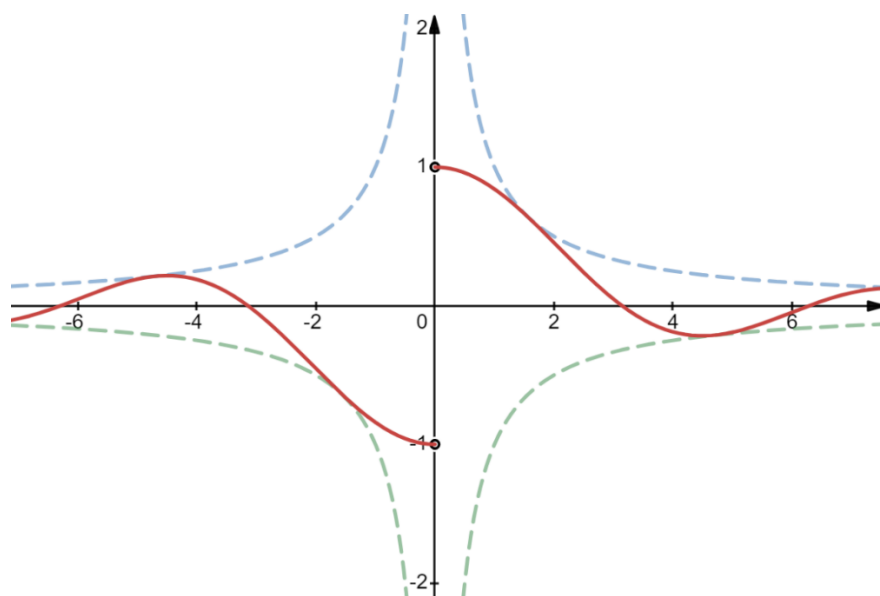


Рис. 2. График функции $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$.

Задача 4 ([1], №690). Укажите точки разрыва и исследуйте их характер:

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

Решение. Так как знаменатель $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ в 0 не обращается, то во всех

точках, кроме точек $-1, 0, 1$, функция непрерывна как отношение и разность непрерывных функций.

Преобразуем выражение $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$. Теперь видно, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = +\infty.$$

То есть, точки 0 и 1 – точки устранимого разрыва, точка (-1) – точка разрыва второго рода, бесконечного разрыва.

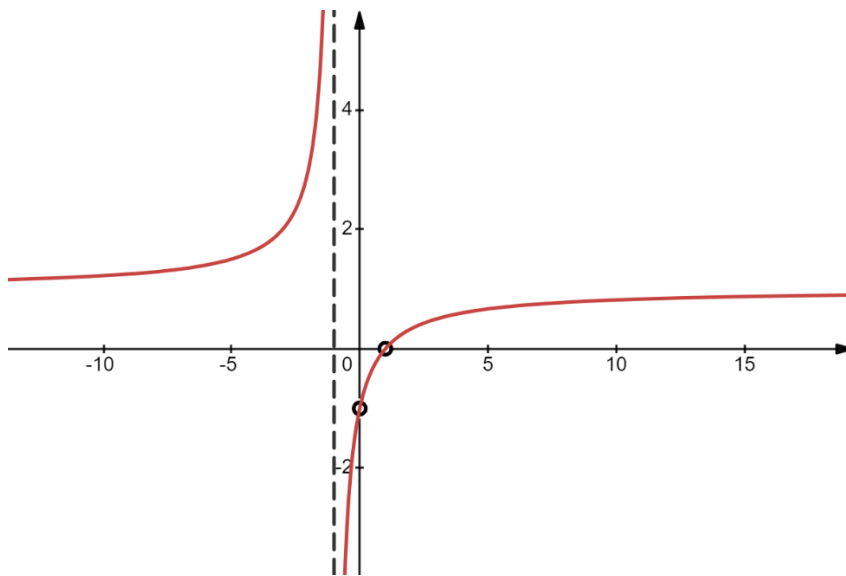


Рис. 3. График функции $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

Задача 5. Найдите точки разрыва функции $f(x) = \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1}$, определите их тип;

найдите асимптоты функции $f(x)$.

Решение. Область существования функции $f(x)$ – вся вещественная ось, за исключением точек ± 1 .

Эти точки и являются точками разрыва.

1) Так как $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = -\frac{1}{2}$, то $x = -1$ – точка разрыва второго рода; прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} - 2^{\frac{x-1}{x+1}} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln 2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)}{x-1} = \frac{-\ln 2}{2}, \text{ тогда } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \frac{-\ln 2}{2} - 1.$$

Точка $x = 1$ – точка устранимого разрыва.

3) Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}}}{x-1} = -2$, то прямая $y = -2$ – горизонтальная асимптота.

Задачи для самостоятельного решения

666. С помощью « $\varepsilon - \delta$ » рассуждений докажите, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

674. г) С помощью « $\varepsilon - \delta$ » рассуждений докажите непрерывность $\sqrt{x}$.

Укажите точки разрыва и исследуйте их характер:

$$\mathbf{676.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ A, & x = 2. \end{cases}, \quad \mathbf{679.} \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, f(0) \text{ произвольно,}$$

$$\mathbf{680.} \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, f(0) = 0.$$

Исследуйте на непрерывность и постройте графики:

$$\mathbf{701.} \quad y = \operatorname{sgn}(\sin x), \quad \mathbf{702.} \quad y = x - [x], \quad \mathbf{717.} \quad y = e^{-1/x}, \quad \mathbf{718.} \quad y = 1 - e^{-1/x^2}.$$

735. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x) = x\chi(x)$, где $\chi(x)$ – функция Дирихле $\chi = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x) \right\}$. Постройте эскиз графика этой функции.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.