ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального исчисления

Практическое занятие № 07. Техника дифференцирования явно заданных функций

Учебные вопросы

1. Нахождение производных функций, заданных явно. Техника дифференцирования.
2. Производная степенно-показательной функции.
3. Логарифмическая производная.

Производная

Если функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x_0, то производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если этот предел существует.

Обозначения y', $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Решения

Задача 1. Найдите производную функции

$$y(x)=\ln\sqrt{x^2-2x\cos a+1}+\operatorname{ctg}a\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos a}{\sin a}.$$

Решение. $y'(x)=\dfrac{2x-2\cos a}{2\left(x^2-2x\cos a+1\right)}+\operatorname{ctg}a\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-\cos a}{\sin a}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sin a}=$

$=\dfrac{x-\cos a}{x^2-2x\cos a+1}+\dfrac{\cos a}{x^2-2x\cos a+1}$, $y'(x)=\dfrac{x}{x^2-2x\cos a+1}$.

Задача 2 ([1], №858). Найдите производную функции $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\cdot\left(-1+\dfrac{2}{1-x^3}\right)'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}\cdot(-2)\cdot\left(1-x^3\right)^{-2}\cdot\left(-3x^2\right)=$

$=\dfrac{2x^2}{\left(1-x^3\right)^2}\left(\dfrac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}$, $y'=\dfrac{2x^2}{\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)}\left(\dfrac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{-1/3}=\dfrac{2x^2}{\left(1-x^6\right)}\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$.

Или: $\left(\ln y\right)'=\left(\dfrac{1}{3}\left(\ln\left(1+x^3\right)-\ln\left(1-x^3\right)\right)\right)'$,

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x^2}{1+x^3}+\dfrac{3x^2}{1-x^3}\right)$,

$$y' = \frac{2x^2}{1-x^6}\cdot y = \frac{2x^2}{\left(1-x^6\right)}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}.$$

Задача 3 ([1], №954). Найдите производную функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

Решение. Вычислим отдельно производные каждого слагаемого.

Производная первого слагаемого:

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{2\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^2+2}}-2\sqrt{3}\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{-2}{\left(-2x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}\right).$$

Производная второго слагаемого:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\left(2x^2+2\right)}\cdot\frac{-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}.$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\left(-x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\left(x^4-1\right)\sqrt{x^2+2}}.$$

Другой способ вычисления производной.

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x},$$

$$y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\text{, где }t=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$t'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}=\frac{-2}{x^2\sqrt{x^2+2}},$$

$$\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right)'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\left(t-\sqrt{3}\right)-\ln\left(t+\sqrt{3}\right)\right)'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}}{\left(t^2-3\right)}.$$

$$y'=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\left(t^2-3\right)}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(t^2+1\right)}\right)\cdot t'=\frac{t^2-1}{\left(t^2-3\right)\left(t^2+1\right)}\cdot t',$$

$$y'=\frac{\frac{x^2+2}{x^2}-1}{\left(\frac{x^2+2}{x^2}-3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2}+1\right)}\cdot\frac{-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}=\frac{2}{\left(-2x^2+2\right)\left(2x^2+2\right)}\cdot\frac{-2}{\sqrt{x^2+2}},$$

$$y'=\frac{1}{\left(x^4-1\right)\sqrt{x^2+2}}.$$

Задача 5 ([1], №963). Найдите производную $y=\sqrt[x]{x}$, $x>0$.

Решение. Рассмотрим $y(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}$, $f(x)>0$; $y(x)=e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}$,

$$y'(x)=e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}\cdot\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right),$$

$$y'(x)=f^g\cdot\left(g'\ln f+g\cdot\frac{f'}{f}\right).$$

Другой способ решения:

$$\ln y(x)=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)},\ \ln y(x)=g(x)\ln\left(f(x)\right),$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=g'(x)\ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},\ y'(x)=y\cdot\left(g'\ln f+g\cdot\frac{f'}{f}\right)=f^g\cdot\left(g'\ln f+g\cdot\frac{f'}{f}\right).$$

$$\left(\sqrt[x]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\sqrt[x]{x}\left(\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x+\frac{1}{x}(\ln x)'\right)=\sqrt[x]{x}\left(\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)=\sqrt[x]{x}\,\frac{(1-\ln x)}{x^2}.$$

Задача 6. Найдите производную $y(x)=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$ в точке $x=0$.

Решение. $\ln\left(y(x)\right)=3\ln(2x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\dfrac{1}{3}\ln(1-x)$.

После дифференцирования этого равенства получается:

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{3\cdot 2}{2x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{(3x+2)}-\frac{2\cdot 5}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)},$$

$$\frac{y'(0)}{y(0)}=\frac{3\cdot 2}{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2\cdot 5}{4}+\frac{1}{3}=-\frac{89}{12},\ y(0)=-\frac{\sqrt{2}}{16},\ y'(0)=-\frac{\sqrt{2}}{16}\left(-\frac{89}{12}\right)=\frac{89\sqrt{2}}{192}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В «сборнике задач и упражнений по математическому анализу» Демидович Б.П. предлагаются задачи **845–976** для выработки навыков дифференцирования. Следует тщательно выполнить не менее **30** упражнений из указанного списка. Нужно добиться уверенной способности записывать выражение для производной без промежуточных записей.

984. б) Найдите логарифмическую производную от функции

$$y(x)=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}.$$

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.