ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 07. Основные понятия дифференциального исчисления

Практическое занятие № 08. Дифференцируемость

Учебные вопросы

1. Производная, односторонние производные, дифференцируемость.
2. Производная обратной функции.

Производная

Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, то производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует.

Односторонние производные

$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Дифференцирование обратной функций

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и существует производная $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, которая может быть найдена по формуле

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Решения

Задача 1 ([1], №828.е)). Вычислите производную функции $y(x) = \mathrm{tg}x$ в произвольной точке $a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in N$, исходя из определения производной.

Решение. $y'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x \cos a - \sin a \cos x}{(x-a)\cos x \cos a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x \cos a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$.

Задача 2 ([1], №992). При каком условии функция

$$f(x) = x^p \sin\frac{1}{x}, \; x \neq 0, \; f(0) = 0$$

а) непрерывна при $x=0$; **б)** дифференцируема при $x=0$; **в)** имеет непрерывную производную при $x=0$.

Решение. а) Непрерывность функции $f(x)=x^p\sin\frac{1}{x}$ при $x=0$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} x^p=0$ при $p>0$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^p\sin\frac{1}{x}=0$ при $p>0$.

Функция $f(x)$ непрерывна при $x=0$, если $p>0$.

б) Дифференцируемость $f(x)$ при $x=0$ означает, что существует производная $f'(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0} x^{p-1}\sin\frac{1}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0$ при $p>1$.

Функция $f(x)$ дифференцируема при $x=0$, если $p>1$, при этом $f'(0)=0$.

в) Непрерывность производной функции $f(x)$ при $x=0$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$.

$$f'(x)=px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x},\ x\ne 0.$$

Конечный предел $f'(x)$ при $x\to 0$ существует, только если $p>2$, причём $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$.

Функция $f(x)$ имеет непрерывную производную при $x=0$, если $p>2$.

Задача 3 ([1], №1004). Для функции $f(x)$ определите левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Решение. $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}+\dfrac{e^{1/x}}{x\left(1+e^{1/x}\right)^2}$.

$f'_-(x)=f'_+(x)=f'(x)$ во всех точках, кроме точки $x=0$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1.$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

Задача 4. Найдите $y'(x)$, если $x=\mathrm{tg}y$, $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Функция $x=\mathrm{tg}y$ непрерывна и строго монотонна при $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда существует обратная функция $y(x)=x^{-1}(y)=\mathrm{arctg}x$.

Производная $x'=\dfrac{1}{\cos^2 y}\neq 0$ при $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$.

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Задача 5 ([1], №1036.в)). Найдите производную обратной функции. Укажите область существования производной: $y=\mathrm{sh}x$.

Решение. Функция $y=\mathrm{sh}x$ непрерывна и строго монотонна при всех x.

Производная $y'=\mathrm{ch}x>0$ при всех x.

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{\mathrm{ch}x}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Таким образом, производная функции, обратной к $y=\mathrm{sh}x$, равна $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

Можно записать, что $(\mathrm{arsh}y)'=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ для всех y.

Задачи для самостоятельного решения

Исходя из определения производной, непосредственно найдите производные следующих функций:

828. д) $y(x)=\sqrt[3]{x}$, **з)** $y(x)=\arcsin x$.

991. Покажите, что функция $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$ имеет разрывную производную.

1005. Для функции $f(x)$ определите левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1007. Для функции $f(x)$ определите левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1036. Найдите производную обратной функции. Укажите область существования производной: **б)** $y=x+e^x$, **г)** $y=\mathrm{th}x$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.