ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального исчисления

Практическое занятие № 09. Производные и дифференциалы высших порядков

Учебные вопросы

1. Нахождение дифференциала функции.
2. Нахождение приближенных значений функций методом замены приращения функции ее дифференциалом.
3. Нахождение производных высших порядков.
4. Нахождение дифференциалов высших порядков.

Производные и дифференциалы высших порядков

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{IV},\ f^{V},\ f^{VI}$$

$$dy = f'(x)dx,\ d^2y = f''(x)dx^2,\ d^3y = f'''(x)dx^3, \ldots$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Таблица производных

$$\left(x^{\mu}\right)^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n+1};$$

$$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Решения

1087. $y = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$. Найдите дифференциал функции y.

Решение. $dy = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{(x+a)dx-(x-a)dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a}\frac{2adx}{x^2-a^2} = \frac{dx}{x^2-a^2}$.

1095. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$. Найдите дифференциал функции y.

Решение. $dy = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}(2udu+2vdv) = \frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$.

1100. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно $\sin 29°$.

Решение. $y=\sin x,\ \ dy=\cos x dx;\ \ x_0=\frac{\pi}{6},\ y_0=\frac{1}{2};$

$$dy=\frac{\sqrt{3}}{2}dx,\ \ dx=-\frac{\pi}{180},\ dy=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx-0.01512;$$

$$\Delta=\sin 29°-\sin 30°\approx-0.01519\ ,$$

$$\sin 29°\approx 0.5-0.01519=0.48481.$$

1126. Найдите y''' : $y=f\left(\frac{1}{x}\right).$

Решение. $y'=f'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$

$$y''=f''\cdot\frac{1}{x^4}+f'\cdot\frac{2}{x^3}\ .$$

$$y'''=f'''\cdot\left(\frac{-1}{x^6}\right)-f''\cdot\frac{4}{x^5}+f''\cdot\left(\frac{-2}{x^5}\right)+f'\cdot\left(\frac{-6}{x^4}\right)=\frac{-1}{x^6}\cdot f'''-\frac{6}{x^5}f''-\frac{6}{x^4}f'\ .$$

1139. Найдите d^2y : $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$

Решение. $dy=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v^2}{\left(v^2+u^2\right)}\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}\ .$

$$d^2y=\frac{\left(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v\right)\left(u^2+v^2\right)-\left(vdu-udv\right)\left(2udu+2vdv\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2},$$

$$d^2y=\frac{\left(vd^2u-ud^2v\right)\left(u^2+v^2\right)-2uv\left(du\right)^2+2uv\left(dv\right)^2+2\left(u^2-v^2\right)dudv}{\left(u^2+v^2\right)^2}.$$

1159. Найдите $y^{(8)}$: $y=\dfrac{x^2}{1-x}$;

Решение. $y=\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{x^2-1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x}=-(x+1)+\dfrac{1}{1-x}$.

$$y^{(8)}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)}.$$

Выявим закономерность:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ \left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\ \left(\frac{1}{1-x}\right)'''=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},\ \ldots$$

и т. д. : $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Докажем с помощью метода математической индукции.

При $n=1$: $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ – верно.

Так как $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n+1)}=\left(\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)'=\dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$, то $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad \forall n\in N$.

И, значит, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(8)}=\dfrac{8!}{(1-x)^9}$.

Можно использовать формулу Лейбница: $(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$.

$$y^{(8)}=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8-k)}\left(x^2\right)^{(k)}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)}\cdot x^2+8\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)}\cdot 2x+\frac{8\cdot 7}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)}\cdot 2=$$

$$=\frac{8!}{(1-x)^9}\cdot x^2+8\frac{7!}{(1-x)^8}\cdot 2x+\frac{8\cdot 7}{2}\frac{6!}{(1-x)^7}\cdot 2=\frac{8!}{(1-x)^9}\left(x^2+2x(1-x)+(1-x)^2\right)=\frac{8!}{(1-x)^9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите дифференциал функции y, если

1089. $y = \arcsin\frac{x}{a}$, $a \neq 0$; **1094.** $y = \mathrm{arctg}\frac{u}{v}$.

1099. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно $\sqrt[3]{1,02}$.

Найдите y'' : **1112.** $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; **1115.** $y = \left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}x$; **1123.** $y = \sqrt{u^2+v^2}$.

1127. Найдите y''' : $y = f\left(e^x\right)$.

1138. Найдите d^2y : $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1158. Найдите $y^{(10)}$: $y = \sqrt{x}$.

1161. Найдите $y^{(20)}$: $y = x^2e^{2x}$.

1166. Найдите y''' : $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

1178. Найдите d^3y : $y = \ln u$.

Найдите $y^{(n)}$: **1196.** $y = \cos^3 x$; **1206.** $y = e^x \cos x$; **1208.** $y = \ln\frac{a+bx}{a-bx}$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.