

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 01. Основные понятия дифференциального исчисления

Практическое занятие № 10. Геометрический смысл производной

Учебные вопросы

1. Касательная.
2. Производная функции, заданной параметрически.
3. Производная функции, заданной неявно.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

Уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Решения

1142. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Найдите $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Решение. $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{2a \sin^5 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}}.$$

1146. $x^2 + y^2 = 25$. Чему равны y' , y'' , y''' в точке $M(3, 4)$?

Решение. $x dx + y dy = 0$, в точке $M(3, 4)$: $3 dx + 4 dy = 0$; $dy = -\frac{3}{4} dx$.

$$dx^2 + dy^2 + y d^2 y = 0, dx^2 + dy^2 + 4 d^2 y = 0, d^2 y = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) = -\frac{25}{64} dx^2.$$

$$3 dy d^2 y + y d^3 y = 0, 3 dy d^2 y + 4 d^3 y = 0,$$

$$d^3 y = -\frac{3}{4} dy d^2 y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} dx \cdot \frac{25}{64} dx^2 = -\frac{225}{1024} dx^3.$$

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1070. Докажите, что у астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

Решение. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x_0^{-1/3} dx + y_0^{-1/3} dy = 0$,

касательная: $x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) = 0$.

Точка пересечения с осью абсцисс — $(x_1, 0)$: $x_0^{-1/3}(x_1 - x_0) + y_0^{-1/3}(-y_0) = 0$,

$$x_1 = x_0 + x_0^{1/3} y_0^{2/3} = x_0^{1/3}(x_0^{2/3} + y_0^{2/3}) = a^{2/3} x_0^{1/3}.$$

Точка пересечения с осью ординат — $(0, y_2)$: $y_2 = y_0 + y_0^{1/3} x_0^{2/3} = a^{2/3} y_0^{1/3}$.

$$x_1^2 + y_2^2 = a^{4/3}(x_0^{2/3} + y_0^{2/3}) = a^{4/3} a^{2/3} = a^2.$$

1078. Напишите уравнения касательных к кривой $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$

в точках $t = 0$, $t = 1$, $t = \infty$.

Решение. $\frac{dx}{dt} = \frac{(2+2t)(1+t^3) - (2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2-2t)(1+t^3) - (2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2t - 4t^3 + t^4}{2 + 2t - 4t^3 - t^4}.$$

$$t = 0, x = y = 0, \frac{dy}{dx} = 1; \text{ касательная: } y = x.$$

$$t = 1, x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{-1} = 3; \text{ касательная: } y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), y = 3x - 4.$$

$$t = \infty, x = y = 0, \frac{dy}{dx} = -1; \text{ касательная: } y = -x.$$

1082. Напишите уравнение касательной и нормали в точке $M(1;1)$ к кривой $xy + \ln y = 1$.

Решение. $ydx + xdy + \frac{dy}{y} = 0, dx + 2dy = 0,$

касательная: $(x-1) + 2(y-1) = 0, x + 2y - 3 = 0.$

$$dx + 2dy = 0, \frac{dx}{dy} = -2,$$

нормаль: $(y-1) = 2(x-1), 2x - y - 1 = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$: **1140.** $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$, **1143.** $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$.

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$. Найдите y', y'', y''' .

1068. Докажите, что показательная кривая $y = a^x, a > 0$ имеет постоянную подкасательную.

1073. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

1081. Напишите уравнение касательной и нормали в точке $M(6;6,4)$ к кривой

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.