ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 02. Важнейшие теоремы о дифференцируемых функциях

Практическое занятие № 11. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Учебные вопросы

1. Вычисление пределов с применением правила Лопиталя.
2. Использование правила Лопиталя в исследованиях функций, требующих раскрытия неопределенностей.

Правило Лопиталя

Пусть f, g — функции, определенные в проколотой окрестности точки a.

1) f, g дифференцируемы во всех точках этой проколотой окрестности, g' не обращается в нуль ни в одной точке.

2) $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0,\ g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ или $f(x) \underset{x\to a}{\to} \infty,\ g(x) \underset{x\to a}{\to} \infty$

3) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a}{\to} A$.

Тогда
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} A.$$

Решения

1325. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$ (применяем правило Лопиталя)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x-e^x+1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x+e^x-e^x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

1333. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

(применяем правило Лопиталя)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+\cos(\sin x)\sin 2x+\cos(\sin x)\cos x\sin x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}=$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$, так как:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{24x}=\frac{1}{24};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{24x}=\frac{2}{24};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x\sin x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{24x}=\frac{1}{24};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{24x}=\frac{1}{24};$$

Или:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)}{x^4}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{2x^2}=\frac{1}{6}.$$

1342. $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln x}$;

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}x^x=e^0=1.$$

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}=1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)\right).$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sin\dfrac{\pi x}{2x+1}\cos\dfrac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{(2x+1)^2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-4\pi}{(2x+1)^3}}{\sin\dfrac{\pi x}{2x+1}\dfrac{\pi}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{2x+1}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}=e^0=1.$$

1363. г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{3}}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)\right),$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x}{2x\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}{2x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x\operatorname{arctg}x-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{arctg}x}{3x}=-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

1373. Исследуйте на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, \qquad\qquad x=0\end{cases},$$

предварительно убедившись в её непрерывности.

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}$ ([1], №1354).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Дифференцируемость в точке $x=0$ функции $f(x)$ означает, что существует конечный предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^x-1\right)-2x-x\left(e^x-1\right)}{2x^2\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x+2e^x-x-2}{2x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-xe^x+2e^x-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x+e^x-1}{6x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x-e^x+e^x}{12x}=-\frac{1}{12}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите пределы: **1323.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot \mathrm{ctg}x-1}{x^2}=-\frac{1}{3}$, **1327.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=1$,

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=-2$, **1338.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=0$, **1356.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=0$,

1363. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{acrsin}x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$, **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{3}}$,

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{1/x}=e^{-\frac{1}{2}}$, **1398.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}$, **1405.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$,

1406. в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(\cos x\right)^{\sin x}}{x^3}=\frac{1}{2}$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.