ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 02. Важнейшие теоремы дифференциального исчисления

Практическое занятие № 12. Формула Тейлора

Учебные вопросы

1. Разложение функций до членов заданного порядка по формуле Тейлора.
2. Использование формулы Тейлора в исследованиях функций, требующих раскрытия неопределенностей.
3. Вычисление пределов функций методом выделения главной части.

Формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \tag{1}$$

$$\text{I. } e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right), \tag{2}$$

$$\text{II. } \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n-1}\right), \tag{3}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right), \tag{4}$$

$$\text{III. } \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\dots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \tag{5}$$

$$\text{IV. } (1+x)^\mu=1+\mu x+\dots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right), \tag{6}$$

$$\text{V. } \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right), \tag{7}$$

$$\text{VI. } \operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right), \tag{8}$$

$$\text{VII. } \operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \tag{9}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^{n-1}x^n+o\left(x^n\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+o\left(x^n\right), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\dots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right), \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\dots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right), \tag{13}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\dots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right), \tag{14}$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o\left(x^{2n}\right), \tag{15}$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\dots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right) \tag{16}$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right). \tag{17}$$

Решения

Задача 1 ([1], №1384). Напишите разложение $\ln\cos x$ по целым неотрицательным степеням x до x^6 включительно.

Решение.

$$\ln\cos x=\ln\left(1+\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)\right)}_{б.м.при\ x\to 0}\right)=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)\right)^3+o\left(\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)\right)^3\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2+2\left(-\frac{x^2}{2!}\right)\frac{x^4}{4!}+o\left(x^6\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^3+o\left(x^6\right)\right)+o\left(x^6\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2!}+x^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)+x^6\left(\frac{-1}{6!}+\frac{1}{2\cdot 4!}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{8}\right)\right)+o\left(x^6\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o\left(x^6\right).$$

Ответ: $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o\left(x^6\right)$.

Задача 2 ([1], №1386). Напишите разложение $\operatorname{tg} x$ по целым неотрицательным степеням x до x^7 включительно.

Решение. Воспользуемся нечётностью функции $\operatorname{tg} x$ и тем, что $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$. Тогда разложение будет иметь вид:

$$\operatorname{tg} x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o\left(x^7\right).$$

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то получаем $\sin x = \left(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o\left(x^7\right)\right)\cos x$.

Используем разложения $\sin x$ и $\cos x$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o\left(x^8\right) = \left(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o\left(x^7\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o\left(x^7\right)\right),$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o\left(x^8\right) = \left(x + x^3\left(a - \frac{1}{2!}\right) + x^5\left(b - \frac{a}{2!} + \frac{1}{4!}\right) + x^7\left(c - \frac{b}{2!} + \frac{a}{4!} - \frac{1}{6!}\right) + o\left(x^7\right)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем:

$$a - \frac{1}{2!} = -\frac{1}{3!},\quad b - \frac{a}{2!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{5!},\quad c - \frac{b}{2!} + \frac{a}{4!} - \frac{1}{6!} = -\frac{1}{7!},$$

откуда $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{15}$, $c = \dfrac{17}{315}$.

Ответ: $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.

Задача 3 ([1], №1409). Выделите главную часть бесконечно малой при $x \to 0$:

$$y = 1 - \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \sim \frac{x}{2}.$$

Решение.

$$y = 1 - \frac{(1+x)^{1/x}}{e} = 1 - \frac{1}{e}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = 1 - \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right) = 1 - \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right) - 1\right) =$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}x + o(x)\right) = \frac{1}{2}x + o(x),$$

$$y = 1 - \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Задача 4. Выделите главную часть бесконечно малой при $x \to 2$:

$$\alpha(x) = e^{\operatorname{tg}\pi x}\cos 3\pi x - \sqrt{1+\sin 2\pi x} \underset{x\to 2}{\sim} -\frac{7}{2}\pi^2(x-2)^2 .$$

Решение. Введем обозначения $t = x-2$, тогда $\operatorname{tg}\pi x = \operatorname{tg}\left(\pi(t+2)\right) = \operatorname{tg}\pi t$,

$\cos 3\pi x = \cos 3\pi(t+2) = \cos 3\pi t$, $\sin 2\pi x = \sin 2\pi t$.

Выделим главную часть бесконечно малой

$e^{\operatorname{tg}\pi t}\cos 3\pi t - \sqrt{1+\sin 2\pi t}$ при $t \to 0$; будем раскладывать до t^2, а если не хватит, то до t^3.

$$\exp(\operatorname{tg}\pi t) = \exp\left(\pi t + o(t^2)\right) = 1 + \pi t + \frac{1}{2}(\pi t)^2 + o(t^2),$$

$$\sqrt{1+\sin 2\pi t} = \left(1+2\pi t + o(t^2)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}2\pi t + o(t^2) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(2\pi t + o(t^2)\right)^2 + o(t^2) =$$

$$= 1 + \pi t - \frac{1}{2}\pi^2 t^2 + o(t^2),$$

$$e^{\operatorname{tg}\pi t}\cos 3\pi t - \sqrt{1+\sin 2\pi t} = \left(1+\pi t + \frac{1}{2}\pi^2t^2 + o(t^2)\right)\left(1 - \frac{1}{2}(3\pi t)^2 + o(t^2)\right) - \left(1 + \pi t - \frac{1}{2}\pi^2 t^2 + o(t^2)\right) =$$
$$= 1 + \pi t + \frac{1}{2}\pi^2 t^2 - \frac{1}{2}(3\pi t)^2 - 1 - \pi t + \frac{1}{2}\pi^2 t^2 + o(t^2) = -\frac{7}{2}\pi^2 t^2 + o(t^2), t \to 0 .$$

$$\alpha(x) = e^{\operatorname{tg}\pi x}\cos 3\pi x - \sqrt{1+\sin 2\pi x} \underset{x\to 2}{\sim} -\frac{7}{2}\pi^2(x-2)^2 .$$

Задача 5 ([1], №1333). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.

Решение. Выпишем разложение числителя по целым неотрицательным степеням x до x^4.

$$\cos(\sin x) = \cos\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3!}x^4+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3!}x^4+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)\right)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

Задача 6 ([1], №1363.г)). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{3}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)\right)$.

Выпишем разложение $\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$ по целым неотрицательным степеням x до x^2.

$$\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

Задача 7 ([1], №1400). Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=-\frac{1}{4}$.

Решение. $x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)$,

Выпишем разложение $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)$ по степеням $\frac{1}{x}$ до $\frac{1}{x^2}$.

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-2=-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

при $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{4}.$$

Задача 8 ([1], №1407). Выделите главную часть бесконечно малой при $x\to 0$:

$$\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)\sim\frac{x^7}{30}.$$

Решение. $\operatorname{tg}(\sin x)=\sin x+\dfrac{(\sin x)^3}{3}+\dfrac{2(\sin x)^5}{15}+\dfrac{17(\sin x)^7}{315}+o\left((\sin x)^7\right),$

$$(\sin x)^3=x^3+3x^2\cdot\left(-\frac{x^3}{3!}\right)+3x^2\cdot\frac{x^5}{5!}+3x\left(-\frac{x^3}{3!}\right)^2+o\left(x^7\right)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{13x^7}{120}+o\left(x^7\right),$$

$$(\sin x)^5=x^5+5x^4\cdot\left(-\frac{x^3}{3!}\right)+o\left(x^7\right)=x^5-\frac{5x^7}{6}+o\left(x^7\right),\ (\sin x)^7=x^7+o\left(x^7\right),$$

$$\operatorname{tg}(\sin x)==x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^7\right)+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+\frac{13x^7}{3\cdot 120}+\frac{2}{15}x^5-\frac{2}{15}\cdot\left(-\frac{5x^7}{6}\right)+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right),$$

$$\operatorname{tg}(\sin x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{107x^7}{5040}+o\left(x^7\right).$$

$$\sin(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}x-\frac{(\operatorname{tg}x)^3}{3!}+\frac{(\operatorname{tg}x)^5}{5!}-\frac{(\operatorname{tg}x)^7}{7!}+o\left((\operatorname{tg}x)^7\right),$$

$$(\operatorname{tg} x)^3=x^3+3x^2\cdot\frac{x^3}{3}+3x\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)^2+3x^2\cdot\frac{2x^5}{15}+o\left(x^7\right)=x^3+x^5+\frac{11}{15}x^7+o\left(x^7\right),$$

$$(\operatorname{tg} x)^5=x^5+5x^4\cdot\frac{x^3}{3}+o\left(x^7\right)=x^5+\frac{5}{3}x^7+o\left(x^7\right),\ (\operatorname{tg} x)^7=x^7+o\left(x^7\right),$$

$$\sin(\operatorname{tg}x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^7\right)-\frac{1}{3!}\left(x^3+x^5+\frac{11}{15}x^7+o\left(x^7\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{5!}\left(x^5+\frac{5}{3}x^7+o\left(x^7\right)\right)-\frac{1}{7!}\left(x^7+o\left(x^7\right)\right)+o\left(x^7\right)$$

$$\sin(\operatorname{tg} x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{55x^7}{1008}+o\left(x^7\right).$$

$\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)=\frac{x^7}{30}+o(x^7),\ x\to 0$, $\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)\sim\frac{x^7}{30}$ при $x\to 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите пределы: **1327.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=1$, **1330.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=-2$,

1363. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{acrsin} x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{6}}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$,

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{1/x}=e^{-\frac{1}{2}}$.

Напишите разложения по целым неотрицательным степеням x до указанного порядка включительно:

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ до x^4. Ответ: $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$,

1385. $\sin(\sin x)$ до x^3. Ответ: $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

Найдите пределы: **1398.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}$, **1405.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$,

1406. в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\frac{1}{2}$.

Выделите главную часть бесконечно малой при $x\to 0$: **1408.** $y=(1+x)^x-1\sim x^2$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.