

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Практическое занятие № 13. Построение графиков функций, заданных явно

Учебные вопросы

1. Применение производных к исследованию функций.
2. Построение графиков функций, заданных явно.

План исследования

1. Определить область существования функции и исследовать поведение функции в граничных точках области существования.
2. Выяснить симметрию графика и периодичность.
3. Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.
4. Определить нули функции и области постоянства знака.
5. Найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции.
6. Определить точки перегиба и установить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции.
7. Найти асимптоты в случае их существования.

Решения

1471. Построить график функции $y = 3x - x^3$.

Решение: 1) функция определена на всей числовой оси;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^3) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - x^3) = +\infty.$$

2) функция – нечетная, так как $y(-x) = y(x)$.

3) функция непрерывна на всей числовой оси;

$$4) \quad y = 3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x),$$

$y = 0$ при $x = 0$ и при $x = \pm\sqrt{3}$, то есть, график функции пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$;

$$y > 0 \text{ при } x < -\sqrt{3} \text{ и при } 0 < x < \sqrt{3}; \quad y < 0 \text{ при } -\sqrt{3} < x < 0 \text{ и } x > \sqrt{3}.$$

5) $y' = 3(1 - x^2)$; $x = \pm 1$ – стационарные точки, $y(1) = 2$, $y(-1) = -2$;

$$y' > 0 \text{ при } -1 < x < 1; \quad y' < 0 \text{ при } x < -1 \text{ и при } x > 1;$$

на промежутке $-1 < x < 1$ функция возрастает,

на промежутках $-\infty < x < -1$ и $1 < x < \infty$ функция убывает.

В точке $(-1; -2)$ функция имеет локальный минимум, в точке $(1; 2)$ – локальный максимум.

6) $y'' = -6x$;

$y'' = 0$ при $x = 0$; $y'' > 0$ при $x < 0$, $y'' < 0$ при $x > 0$;

На промежутке $-\infty < x < 0$ функция выпукла, на промежутке $0 < x < +\infty$ функция вогнута; точка $(0; 0)$ – точка перегиба.

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x^2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x^2) = -\infty$.

Асимптот нет.

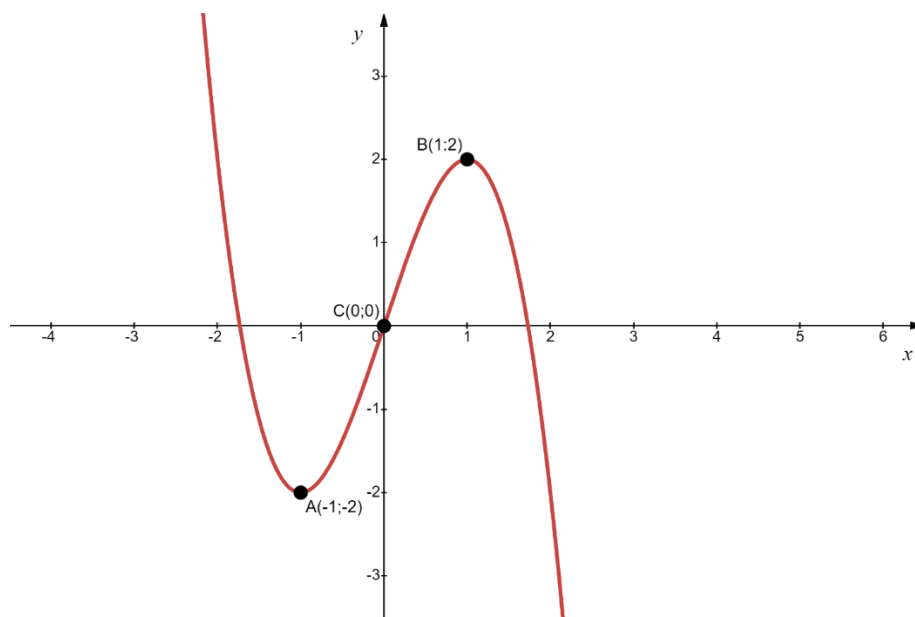


Рис. 1. График функции $y = 3x - x^3$.

1481. Построить график функции $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

Решение: 1) функция определена на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty;$$

2) график функции не обладает симметрией; $y(x)$ – функция непериодическая;

3) функция непрерывна как дробно-рациональная на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

$x = 1$ – точка разрыва второго рода,

прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота;

4) при $x = 0$ $y = 1$, при $x = -1$ $y = 0$;

$y > 0$ при $x > -1$, $y < 0$ при $x < -1$.

$$5) \quad y'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(3(x-1) - 2(x+1))}{(x-1)^3} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3};$$

$x = -1$, $x = 5$ – стационарные точки, $y(-1) = 0$, $y(5) = \frac{27}{2}$;

$y' > 0$ при $x < -1$, $-1 < x < 1$ и $x > 5$; $y' < 0$ при $1 < x < 5$;

на промежутках $(-\infty; 1)$, $(5; +\infty)$ функция возрастает,

на промежутке $(1; 5)$ функция убывает,

точка $(5; 13,5)$ – точка локального минимума;

$$6) \quad y'' = \left[(x+1)^2 \cdot \frac{1}{(x-1)^3} \cdot (x-5) \right]' = 2 \frac{(x+1)}{(x-1)^3} (x-5) - 3 \frac{(x+1)^2}{(x-1)^4} (x-5) + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{(x+1)}{(x-1)^4} (2(x-1)(x-5) - 3(x+1)(x-5) + (x^2 - 1)) = 24 \frac{(x+1)}{(x-1)^4};$$

$y'' = 0$ при $x = -1$, $y'' > 0$ при $x > -1$, $x \neq 1$, $y'' < 0$ при $x < -1$;

на промежутке $(-\infty; -1)$ функция вогнутая, на промежутках $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ – выпуклая, $(-1; 0)$ — точка перегиба;

$$7) k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 5.$$

$$\text{Или } y(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-2} = x \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$= x \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{12}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + 5 + \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow \pm\infty;$$

прямая $y = x + 5$ — наклонная асимптота.

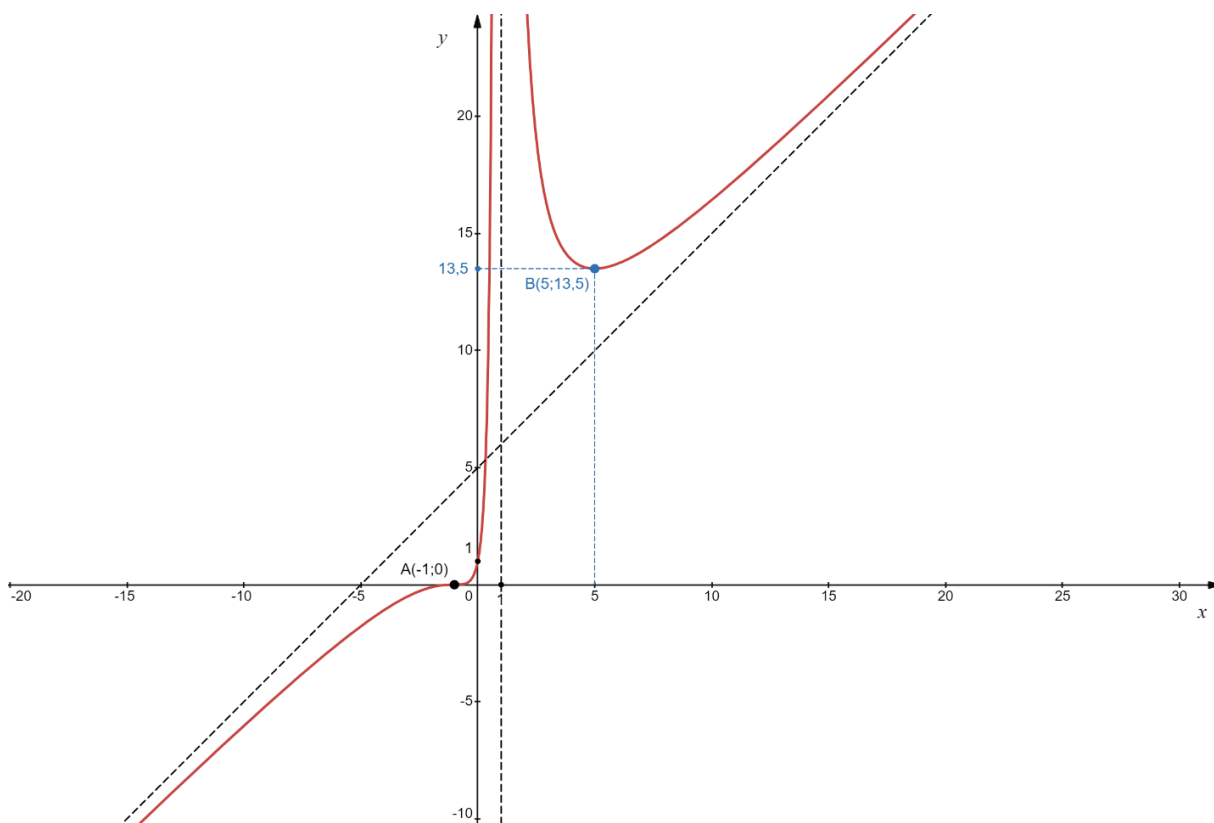


Рис. 2. График функции $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1502. Построить график функции $y = \sin x \sin 3x$.

Решение: 1) функция определена на всей числовой оси;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x)$ не существует;

2) функция чётная, периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$. Проведем исследование на отрезке $[0; \pi]$;

3) функция непрерывна на всей числовой оси как произведение элементарных функций;

$$4) y = 0 \text{ при } x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi;$$

точки $(0; 0)$, $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$, $(0; \pi)$ – точки пересечения с координатными осями;

$$y > 0 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x < \pi; y < 0 \text{ при } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3};$$

$$5) y' = (\sin x \sin 3x)' = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)' = 2 \sin 4x - \sin 2x = \sin 2x(4 \cos 2x - 1);$$

$$\text{стационарные точки: } 0, \frac{\pi}{2}, \pi; \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \frac{\pi}{5}, \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \frac{4\pi}{5};$$

$$y' > 0 \text{ при } 0 < x < \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2} < x < \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4};$$

$$y' < 0 \text{ при } \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} < x < \pi;$$

на промежутках $\left(0; \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right)$ функция возрастает,

на промежутках $\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}; \pi\right)$ – убывает;

$$y\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \left(2 \frac{1}{4^2} - 1 \right) \right) = \frac{9}{16} \approx 0.57;$$

точки $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$, $(\pi; 0)$ – точки локального минимума,

точки $\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}; \frac{9}{16}\right)$, $\left(\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}; \frac{9}{16}\right)$ – точки локального максимума;

$$6) \quad y'' = (2 \sin 4x - \sin 2x)' = 8 \cos 4x - 2 \cos 2x = 2(8 \cos^2 2x - \cos 2x - 4);$$

$$8 \cos^2 2x - \cos 2x - 4 = 0 \quad \text{при} \quad \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{129}}{16};$$

$$y'' = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \frac{\pi}{10}, \quad x_4 = \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \frac{9\pi}{10},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \frac{\pi}{3}, \quad x_3 = \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \frac{2\pi}{3};$$

$$y'' > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{9\pi}{10} < x < \pi;$$

$$y'' < 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{9\pi}{10}.$$

На промежутках $\left(0; \frac{\pi}{10}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{9\pi}{10}; \pi\right)$ функция выпуклая;

На промежутках $\left(\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{9\pi}{10}\right)$ – функция вогнутая.

Точки x_1, x_2, x_3, x_4 – точки перегиба, $y(x_1) = y(x_4) \approx 0,3$, $y(x_2) \approx -0,24$.

7) асимптот нет.

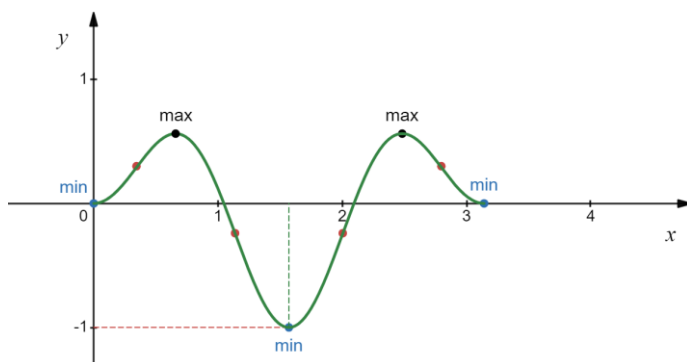


Рис. 3. График функции $y = \sin x \sin 3x$, $0 \leq x \leq \pi$; выделенные точки – точки перегиба.

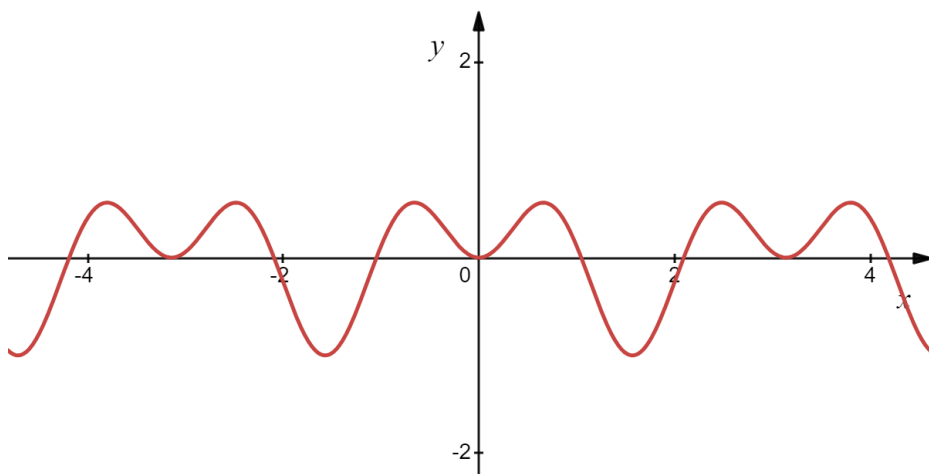


Рис. 4. График функции $y = \sin x \sin 3x$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить графики следующих функций:

1485. 6) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, **1489.** $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$, **1508.** $y = x + e^{-x}$, **1510.** $y = \frac{e^x}{1+x}$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.