Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Практическое занятие № 14. Построение графиков функций, заданных параметрическими уравнениями

Учебные вопросы

1. Применение производных к исследованию функций, заданных параметрическими уравнениями.
2. Построение кривых, заданных параметрически.
3. Построение кривых, заданных неявно.

Решения

1533. Построить кривую: $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

Решение. Функции $x(t)$, $y(t)$ определены и непрерывны при $t<-1$, $-1<t<1$, $t>1$. $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Параметрические уравнения определяют функцию, однозначную и непрерывную на тех промежутках изменения параметра t, для которых функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна.

Выделим такие промежутки.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2},\ \frac{dy}{dt}=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2};$$

функция $x(t)$ определена и строго монотонна на четырёх промежутках: $(-\infty;0]\cup(0;1)\cup(1;2]\cup(2;+\infty)$.

С учетом области определения функции $y(t)$ получается пять промежутков, на которых параметрические уравнения $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$ определяют однозначную и непрерывную функцию .

$t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup(0;1)\cup(1;2]\cup(2;+\infty)$.

Формальное дифференцирование на всех промежутках производится одинаково.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{t^2+1}{(t+1)^2\,t(t-2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{(t-1)^3(t^3+3t+1)}{(t+1)^3\,t^3(t-2)^3}.$$

Для удобства построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$.

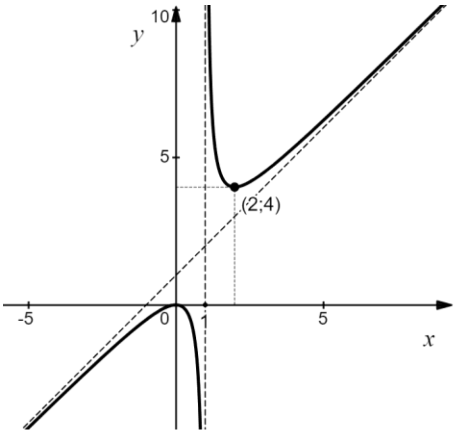

Рис. 1. График $x(t)$

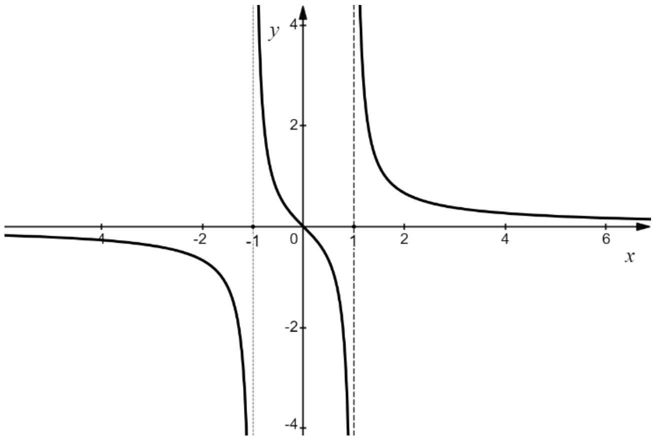

Рис. 2. График $y(t)$

1) Пусть $t < -1$.

$\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$, $x(-1) = -\dfrac{1}{2}$, то есть, $x < -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to-1-0} y(t) = -\infty$, $y < 0$.

Прямые $y = 0$ и $x = -\dfrac{1}{2}$ – асимптоты.

При $t < -1$: $y' < 0$, $y'' < 0$.

Т.о. при $t < -1$, параметрические уравнения задают непрерывную, убывающую, вогнутую функцию на луче $x < -\dfrac{1}{2}$, с вертикальной асимптотой $x = -\dfrac{1}{2}$ и горизонтальной асимптотой $y = 0$.

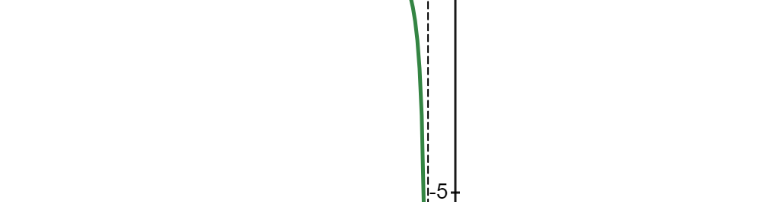

Рис. 3. График $x(t)$, $y(t)$, $t < -1$.

2) Пусть $-1 < t \le 0$.

$x(-1) = -\frac{1}{2}$, $x(0) = 0$, то есть, $-\frac{1}{2} < x \le 0$.

$\lim\limits_{t \to -1+0} y(t) = +\infty$, $y(0) = 0$, то есть, $y > 0$.

Прямая $x = -\frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота.

При $-1 < t < 0$: $y' < 0$.

При переходе через $t = -1$ вторая производная меняет знак.

Если $g(t) = t^3 + 3t + 1 = 0$, то $y'' = 0$. Так как $g(-1) = -3 < 0$, а $g(0) = 1 > 0$, то $g(t)$, а, значит, и $\frac{d^2y}{dx^2}$ имеет простой корень $t^* \approx -0.365$ на промежутке $(-1;0)$. Его можно найти, например, с помощью формулы Кардано. Так как $g'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, для всех значений t, то $g(t)$ – возрастающая функция, и, значит, больше корней у неё нет.

Итого: при $-1 < t < t^*$: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, при $t^* < t < 0$: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

То есть, t^* – точка перегиба: $x(t^*) \approx -0.1$, $y(t^*) \approx 0.42$.

Т.о. при $-1 < t \le 0$, параметрические уравнения задают непрерывную убывающую функцию на промежутке $-\frac{1}{2} < x \le 0$, с вертикальной асимптотой $x = -\frac{1}{2}$. Эта функция является выпуклой при $-1 < t < t^*$, т.е. на промежутке $-\frac{1}{2} < x < x(t^*) \approx -0.1$ и вогнутой при $t^* < t < 0$, т.е. на промежутке $x(t^*) < x \le 0$.

Касательная в точке $(0;0)$, соответствующей $t = 0$, – вертикальная, так как

$$\lim_{t \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to 0} \frac{-(t^2+1)}{(t+1)^2 t(t-2)} = \infty .$$

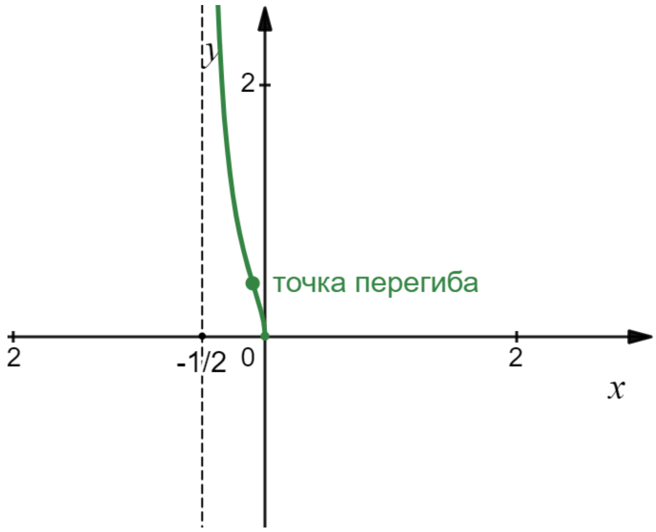

Рис. 4. График $x(t)$, $y(t)$, $-1 < t \le 0$.

3) Пусть $0 < t < 1$.

$x(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to 1-0} x(t) = -\infty$, то есть, $x \le 0$.

$y(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to 1-0} y(t) = -\infty$, то есть, $y \le 0$.

$$\lim_{t\to 1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1-0} \frac{t(t-1)}{(t^2-1)t^2} = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to 1-0}\left(y(t) - \frac{1}{2}x(t)\right) = \lim_{t\to 1-0} \frac{t}{t-1}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{2}\right) = \lim_{t\to 1-0} \frac{t}{t-1}\left(\frac{2-t-t^2}{2(t+1)}\right) = \lim_{t\to 1-0} \frac{t}{(t-1)} \frac{(1-t)(2+t)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}$$

Значит, прямая $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ – наклонная асимптота при $t \to 1-0$.

При $0 < t < 1$: $y' > 0$, $y'' > 0$.

Т.о. при $0 < t < 1$, параметрические уравнения задают непрерывную, возрастающую, выпуклую функцию на промежутке $x \le 0$, с наклонной асимптотой $2x - 4y - 3 = 0$.

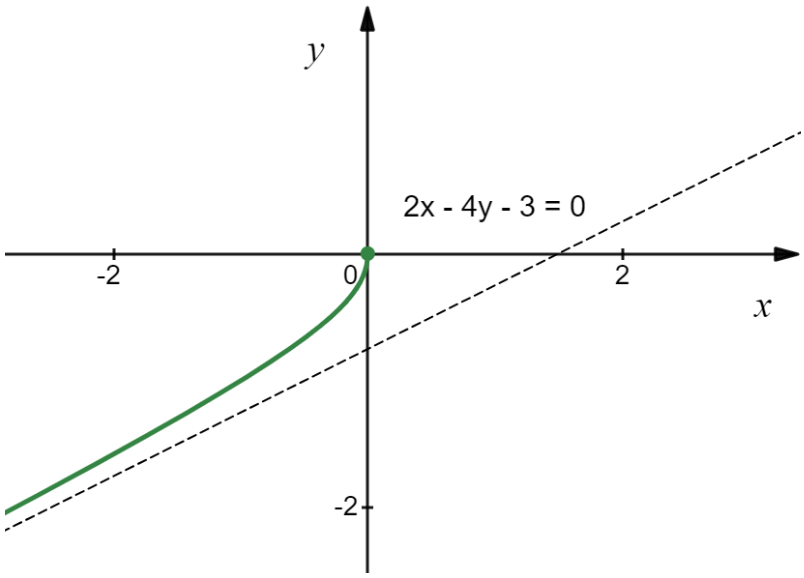

Рис. 5. График $x(t)$, $y(t)$, $0<t<1$.

4) Пусть $1<t\le 2$.

$\lim\limits_{t\to 1+0} x(t)=+\infty$, $x(2)=4$, то есть, $x\ge 4$.

$\lim\limits_{t\to 1+0} y(t)=+\infty$, $y(2)=\dfrac{2}{3}$, то есть, $y\ge \dfrac{2}{3}$.

$$\lim_{t\to 1+0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1-0}\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{1}{2},\ \lim_{t\to 1+0}\left(y(t)-\frac{1}{2}x(t)\right)=\lim_{t\to 1-0}\left(y(t)-\frac{1}{2}x(t)\right)=-\frac{3}{4},$$

прямая $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ – наклонная асимптота при $t\to 1+0$.

При $1<t<2$: $y'>0$, $y''<0$.

Т.о. при $1<t<2$, параметрические уравнения задают непрерывную, возрастающую, вогнутую функцию на промежутке $x\ge 4$, с наклонной асимптотой $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$. Касательная в точке $\left(4;\dfrac{2}{3}\right)$, соответствующей $t=2$, – вертикальная.

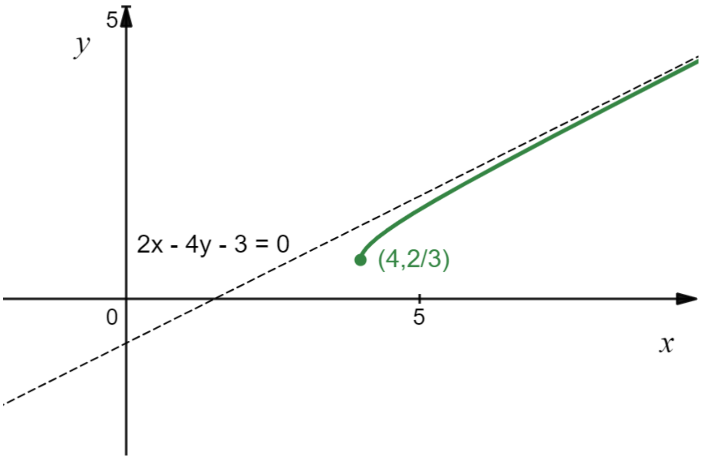

Рис. 6. График $x(t)$, $y(t)$, $1 < t \le 2$.

5) Пусть $t > 2$.

$x(2) = 4$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$, то есть, $x > 4$.

$y(2) = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$, то есть, $0 < y < \frac{2}{3}$.

Прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

При $t > 2 : y' < 0$, $y'' > 0$.

Т.о. при $t > 2$, параметрические уравнения задают непрерывную, убывающую, выпуклую функцию на промежутке $x > 4$, с горизонтальной асимптотой $y = 0$

.

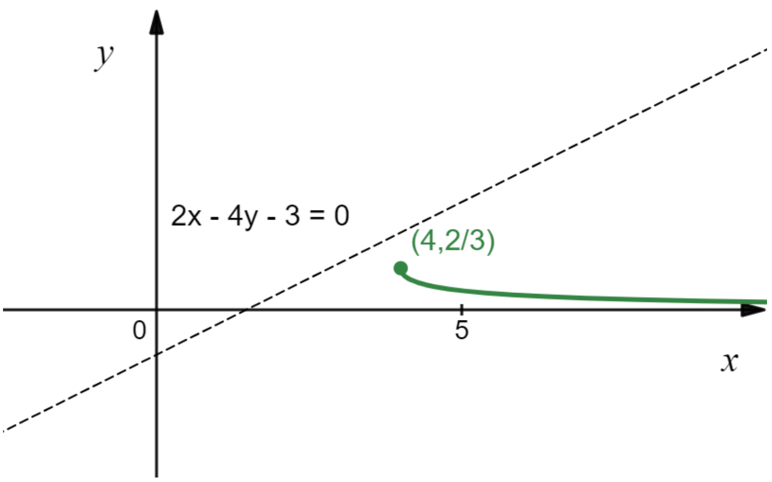

Рис. 7. График $x(t)$, $y(t)$, $t > 2$.

Итоговый рисунок линии, заданной параметрическими уравнениями

$x=\frac{t^2}{t-1},\ y=\frac{t}{t^2-1}$.

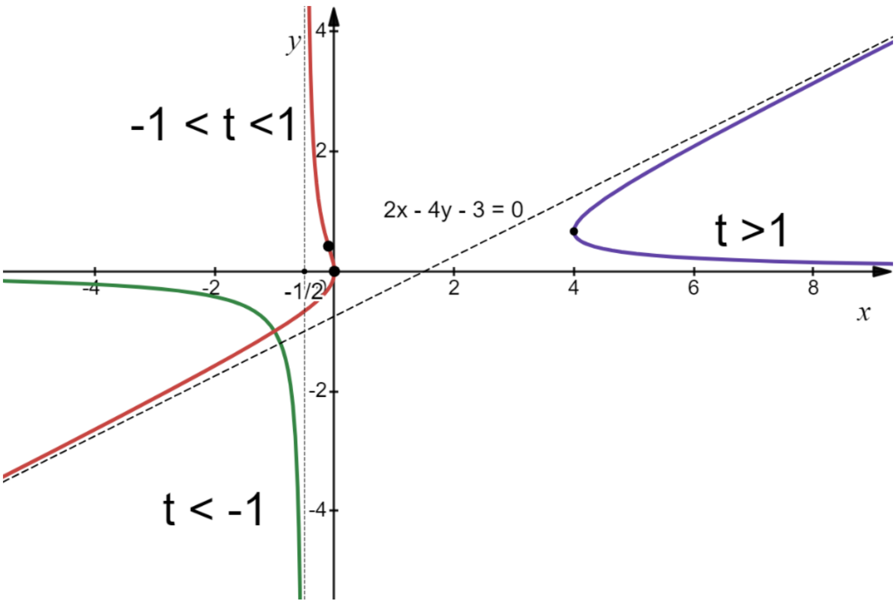

Рис. 8. График $x(t)$, $y(t)$, $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

1541. Построить кривую: $x^3+y^3=3axy\ (a>0)$.

Решение. Полагая $y=tx$, приходим к параметрическим уравнениям кривой:

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\ y=\frac{3at^2}{t^3+1}.$$

Функции $x(t)$, $y(t)$ определены и непрерывны при $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

$\frac{dx}{dt}=\frac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}$, значит, $x(t)$ непрерывна и строго монотонна при

$$t\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right).$$

Т.о. получается три промежутка, на которых параметрические уравнения

$x=\frac{3at}{t^3+1},\ y=\frac{3at^2}{t^3+1}$ определяют однозначную и непрерывную функцию:

$t \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right).$

Первая производная $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3at(2-t^3)}{(t^3+1)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$

t	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$
$\frac{dy}{dx}$	–	–	min	+	∞	–	max	+

Вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t^3+1)^4}{3a(1-2t^3)^3},$

t	$\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$
функция	выпуклая	вогнутая

1) $t \in (-\infty; -1)$.

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 0,$

$\lim\limits_{t \to -1-0} x(t) = +\infty, \lim\limits_{t \to -1-0} y(t) = -\infty,$

$\frac{dy}{dx} < 0, \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$

$\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t \to -1-0}{\to} -1, \; y(t) - (-1)x(t) = 3a\frac{(t^2+t)}{t^3+1} = 3a\frac{t}{t^2-t+1} \underset{t \to -1-0}{\to} -a.$

$y(t) - (-1)x(t) = 3a\frac{(t^2+t)}{t^3+1} = 3a\frac{t}{t^2-t+1} \underset{t \to -1-0}{\to} -a.$

Прямая $y+x=-a$ – наклонная асимптота при $t\to -1-0$.

Т.о. при $t\in(-\infty;-1)$, параметрические уравнения задают непрерывную, убывающую, выпуклую функцию на промежутке $x\ge 0$, с наклонной асимптотой $y+x=-a$.

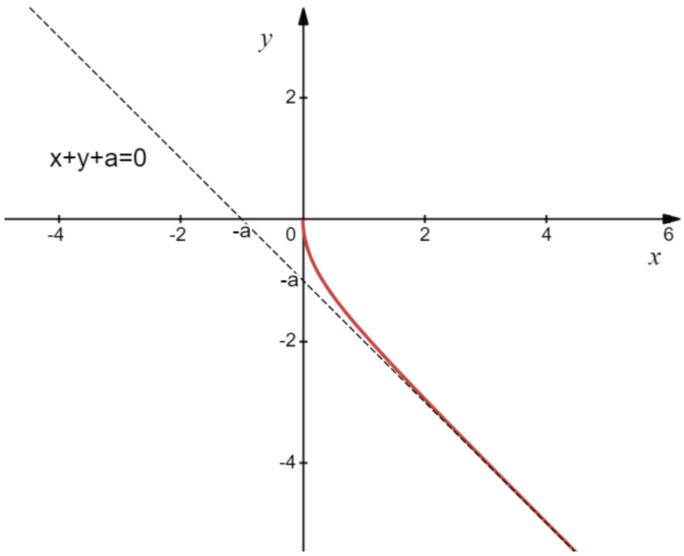

Рис. 9. График $x(t)$, $y(t)$, $t\in(-\infty;-1)$.

2) $t\in\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

$\lim\limits_{t\to -1+0} x(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to -1+0} y(t)=+\infty$,

$x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=a\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=a\sqrt[3]{4}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=a\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}}=a\sqrt[3]{2}$.

При $t\in(-1;0)$: $\dfrac{dy}{dx}<0$, $t\in\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$: $\dfrac{dy}{dx}>0$, точка $\left(x(0);y(0)\right)=(0;0)$ – точка минимума.

$\lim\limits_{t\to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-0}\dfrac{dy}{dx}=+\infty$, $\lim\limits_{t\to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}+0}\dfrac{dy}{dx}=-\infty$,

касательная к кривой в точке $\left(a\sqrt[3]{4};a\sqrt[3]{2}\right)$, соответствующей $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, – вертикальна.

При $t \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$.

$\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t \to -1+0}{\to} -1$, $y(t) + x(t) \underset{t \to -1+0}{\to} -a$.

Прямая $y + x = -a$ – наклонная асимптота при $t \to -1+0$.

Т.о. при $t \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$, параметрические уравнения задают непрерывную, выпуклую, убывающую на промежутке $x \le 0$, возрастающую на промежутке $0 < x \le a\sqrt[3]{4}$, функцию с наклонной асимптотой $x + y + a = 0$. Эта функция в точке $(0;0)$ имеет минимум.

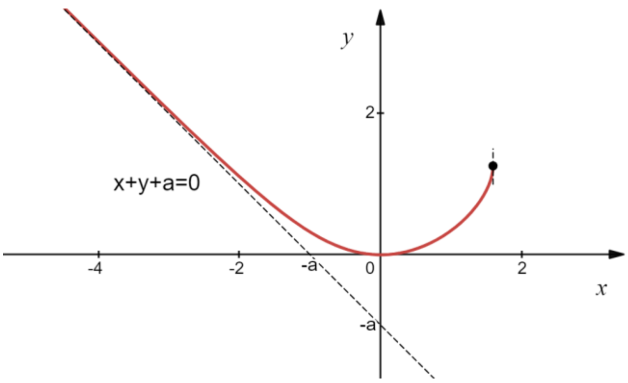

Рис. 10. График $x(t)$, $y(t)$, $t \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

3) $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$.

$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = a\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = a\sqrt[3]{4}$, $y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = a\frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = a\sqrt[3]{2}$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

При $t = \sqrt[3]{2}$ функция $y(x)$ имеет максимум $\left(x\left(\sqrt[3]{2}\right); y\left(\sqrt[3]{2}\right)\right) = \left(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4}\right)$, т.к.

$\frac{dy}{dx}$ меняет знак при переходе через $t = \sqrt[3]{2}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{dy}{dx}=+\infty$, касательная к кривой в точке $(0;0)$, соответствующей $t=+\infty$ – вертикальная.

При $t\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$.

Т.о. при $t\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$, параметрические уравнения задают непрерывную, вогнутую, возрастающую на промежутке $0<x\le a\sqrt[3]{2}$, убывающую на промежутке $a\sqrt[3]{2}<x\le a\sqrt[3]{4}$. Эта функция в точке $\left(a\sqrt[3]{2};a\sqrt[3]{4}\right)$ имеет максимум.

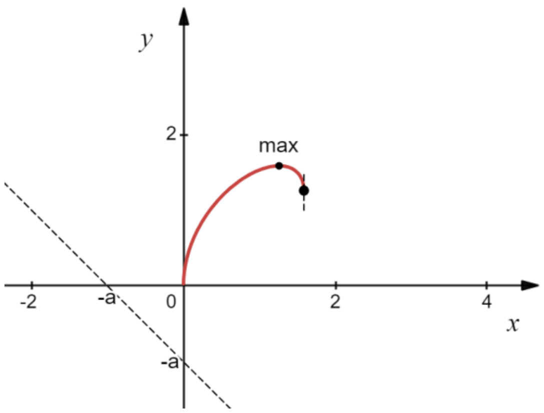

Рис. 11. График $x(t)$, $y(t)$, $t\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$.

Итоговый рисунок кривой $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

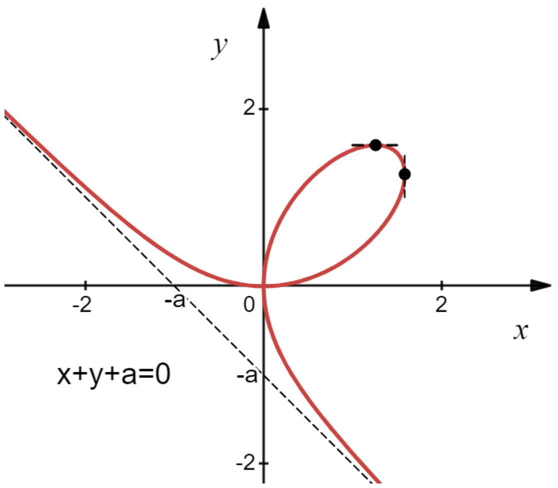

Рис. 12. $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить следующие кривые:

1534. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1}{t^2+1}$,

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.