ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № 02. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема № 03. Исследование функций методами дифференциального исчисления

Практическое занятие № 15. Построение линий в полярной системе координат

Учебные вопросы

1. Применение производных к исследованию функций, заданных полярными уравнениями.
2. Построение кривых, заданных полярными уравнениями.

Краткие теоретические сведения

1) Кривая Γ задана в полярных координатах уравнением: $r = h(\varphi)$.

Параметрические уравнения этой кривой $\begin{cases} x = h(\varphi)\cos\varphi \\ y = h(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$.

2) Если $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, то $\begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi)(r'\cos\varphi - r\sin\varphi) - (r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi)(r'\sin\varphi + r\cos\varphi)}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r''r}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}.$$

Решения

Задача 1. $r = a, \quad a > 0.$

Решение. $r \geq 0$, $r = a \Leftrightarrow \quad r^2 = a^2$ – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

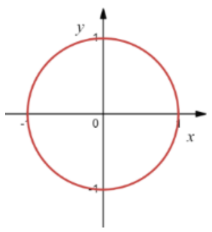

Рис.1. $r = 1$.

Задача 2. $r = 2a\cos t, \quad a > 0.$

Решение. $r^2 = 2ar\cos t, \quad x^2 + y^2 = 2ax$,

$(x - a)^2 + y^2 = a^2$ – окружность с центром $(a;0)$ и радиусом a.

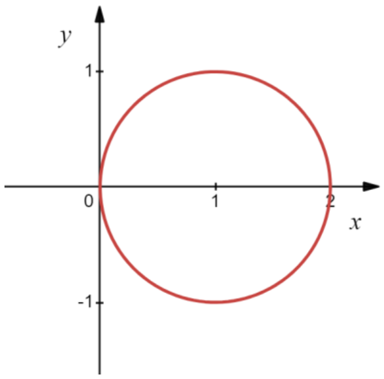

Рис. 2. $r = 2\cos t.$

Задача 3 ([1], №1546). $r = a + b\cos\varphi.$

Решение. $r^2 + 2r'^2 - r''r = \left(a + b\cos t\right)^2 + 2b^2\sin^2 t + b\cos t\left(a + b\cos t\right) = a^2 + 2b^2 + 3ab\cos t$.

Рассмотрим частный случай:

$r = 2 + \cos\varphi.$

$r = r(\varphi)$ – положительная, периодическая; рассматриваем только $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Построим примерный рисунок по точкам на промежутке $\varphi \in [0; \pi]$.

$\varphi \in [0;\pi]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = r(\varphi)$	3	2.9	2.5	2.7	2	1.5	1.3	1.1	1

$r(\varphi) = r(2\pi - \varphi)$

$\varphi \in [\pi;2\pi]$	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	π
$r = r(\varphi)$	3	2.9	2.5	2.7	2	1.5	1.3	1.1	1

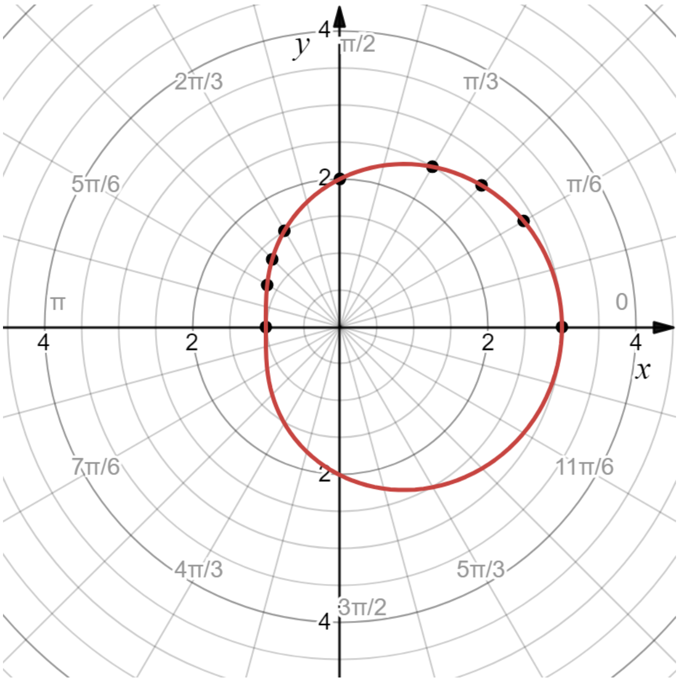

Рис.3. $r = 2 + \cos\varphi$, построение по точкам.

Проведём уточнения, перейдя к параметрическим уравнениям кривой:

$x(\varphi) = (2 + \cos\varphi)\cos\varphi,\; y(\varphi) = (2 + \cos\varphi)\sin\varphi.$

$\dfrac{dy}{d\varphi} = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi = 0$;

$2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1 = 0$; $\quad \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$;

$\dfrac{dy}{d\varphi} = 0$ при $\varphi = \varphi_1 = \arccos\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 68.5^\circ$ или

$\varphi = \varphi_2 = 2\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 291.5^\circ$.

$x(\varphi_1) \approx 0.87$, $y(\varphi_1) \approx 2.2$ – точка максимума;

$x(\varphi_2) \approx 0.87$, $y(\varphi_2) \approx -2.2$ – точка минимума.

$\dfrac{dx}{d\varphi} = -2\sin\varphi(1 + \cos\varphi) = 0$ при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 2\varphi + 2\cos\varphi}{-2\sin\varphi(1 + \cos\varphi)}$.

$\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{dy}{dx}=\infty$, $\lim\limits_{\varphi\to \pi}\frac{dy}{dx}=\infty$: в точках $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ – вертикальные касательные.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6(1+\cos\varphi)}{-8\sin^3\varphi(1+\cos\varphi)^3}=-\frac{3}{4\sin^3\varphi(1+\cos\varphi)^2},$$

$\frac{d^2y}{dx^2}<0$, $\varphi\in(0;\pi)$; $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, $\varphi\in(\pi;2\pi)$.

φ	$\varphi\in(0;\pi)$	$\varphi\in(\pi;2\pi)$
функция	вогнутая	выпуклая

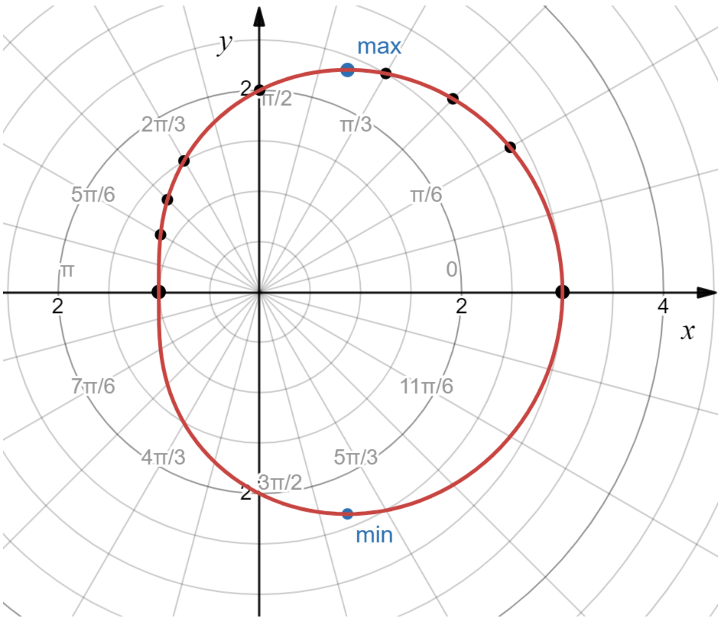

Рис. 4. $r=2+\cos\varphi$.

Задача 4. Построить линию: $r=\frac{1}{\cos 3\varphi}$.

Решение. Область определения: $\cos 3\varphi>0$,

$\varphi\in(-\pi/6;\pi/6)\cup(\pi/2;5\pi/6)\cup(7\pi/6;3\pi/2)$.

Параметрические уравнения: $x=\frac{\cos\varphi}{\cos 3\varphi}$, $y=\frac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi}$.

Рассмотрим $\varphi\in(0;\pi/6)$.

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{-\sin\varphi\cos 3\varphi+3\sin 3\varphi\cos\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=\frac{\sin 2\varphi-\sin 4\varphi+3\sin 2\varphi+\sin 4\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=\frac{4\sin 2\varphi+2\sin 4\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin 2\varphi\left(1+\cos 2\varphi\right)}{\cos^2 3\varphi}>0,\ \varphi\in\left(0,\ \pi/6\right).$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{\cos\varphi\cos 3\varphi+3\sin 3\varphi\sin\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=\frac{\cos 2\varphi+\cos 4\varphi+3\cos 2\varphi-3\cos 4\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=\frac{4\cos 2\varphi-2\cos 4\varphi}{2\cos^2 3\varphi}=$$

$$=\frac{2\cos 2\varphi-2\cos^2 2\varphi+1}{\cos^2 3\varphi}>0,\ \varphi\in\left(0,\ \pi/6\right).$$

$$\frac{dy}{dx}>0,\ \varphi\in(0;\pi/6).$$

$$r=\frac{1}{\cos 3\varphi},\ r'=\frac{3\sin 3\varphi}{\cos^2 3\varphi},r''=9\frac{\cos^2 3\varphi+2\sin^2 3\varphi}{\cos^3 3\varphi}.$$

$$r^2+2r'^2-r''r=\frac{1}{\cos^2 3\varphi}+18\frac{\sin^2 3\varphi}{\cos^4 3\varphi}-9\frac{\cos^2 3\varphi+2\sin^2 3\varphi}{\cos^4 3\varphi}=-8\frac{\cos^2 3\varphi}{\cos^4 3\varphi}=-\frac{8}{\cos^2 3\varphi}<0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'^2-r''r}{\left(r'\cos\varphi-r\sin\varphi\right)^3}<0,\ \varphi\in(0;\pi/6).$$

$x(0)=1$, $y(0)=0$; $x\left(\varphi\right)\underset{\varphi\to\pi/6}{\to}\infty$, $y\left(\varphi\right)\underset{\varphi\to\pi/6}{\to}\infty$, возможна асимптота.

Асимптоты: 1). $\frac{y}{x}\underset{\varphi\to\pi/6}{\to}\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}y-x=\frac{\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi}{\cos 3\varphi}=\frac{2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 3\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}\underset{\varphi\to\pi/6}{\to}-\frac{2}{3}$,

$x-\sqrt{3}y-\frac{2}{3}=0$ – асимптота при $\varphi\to\pi/6$.

2). $\frac{y}{x}\underset{\varphi\to-\pi/6}{\to}-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}y+x=\frac{\sqrt{3}\sin\varphi+\cos\varphi}{\cos 3\varphi}=\frac{2\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 3\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}\underset{\varphi\to-\pi/6}{\to}\frac{2}{3}$,

$x+\sqrt{3}y-\frac{2}{3}=0$ – асимптота при $\varphi\to-\pi/6$.

3). $x = \dfrac{\cos\varphi}{\cos 3\varphi} \underset{\varphi\to\pi/2}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi} \underset{\varphi\to\pi/2}{\longrightarrow} \infty$, $x = -\dfrac{1}{3}$ – асимптота при $\varphi \to \pi/2$.

При $\varphi \in [0;\pi/6)$ уравнение $r = \dfrac{1}{\cos 3\varphi}$ определяет непрерывную, возрастающую вогнутую функцию на промежутке $x \ge 1$ с наклонной асимптотой $x - \sqrt{3}y - \dfrac{2}{3} = 0$.

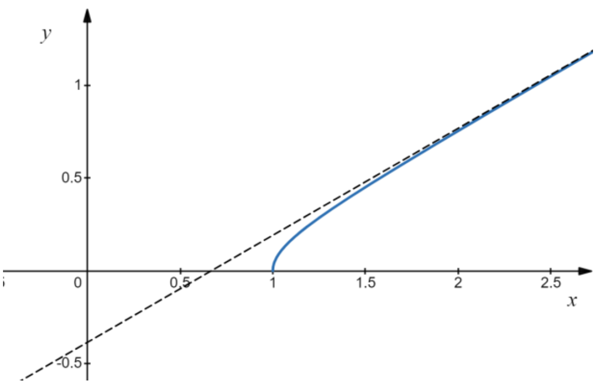

Рис. 5. $r = \dfrac{1}{\cos 3\varphi}$, $\varphi \in [0;\pi/6)$.

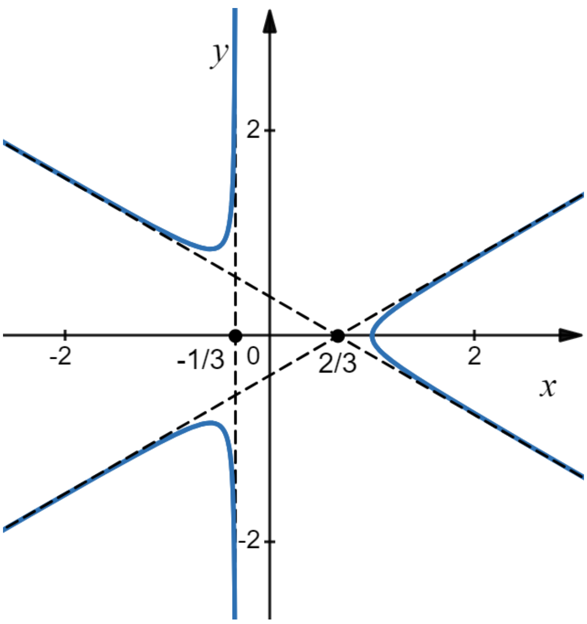

Рис. 6. $r = \dfrac{1}{\cos 3\varphi}$.

Задачи для самостоятельного решения

1) построить график кривой, заданной в полярной системе координат: $r\sin\varphi = a$,

2) ([1], №1548) построить кривую $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $a > 0$.

Разработал ст. преподаватель кафедры высшей математики

Баландюк А.В.