Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие №01. Интегрирование с помощью таблицы интегралов и подстановки.

I. Учебные вопросы

1. **Интегрирование с помощью таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.**

Сущность метода непосредственного интегрирования состоит в использовании формул алгебры, тригонометрии и свойства линейности неопределенного интеграла, с тем, чтобы представить его в виде линейной комбинации табличных интегралов.

Для широкого круга неопределенных интегралов оказывается удобным для приведения к табличному виду преобразовать дифференциал**.**

Дифференциал не меняется, если к переменной интегрирования прибавить или отнять постоянную величину, а если умножить переменную интегрирования, то на эту же величину необходимо разделить дифференциал:

$$dx = d(x+c) \qquad dx = \frac{1}{a} d(ax+c)$$

Такая процедура после переобозначения переменной интегрирования $ax+c=t$ приводит к табличным интегралам.

2. **Замена переменной (метод подстановки).**

Замена переменной в неопределенном интеграле проводится с целью упрощения подынтегральной функции. Основу метода замены переменной составляет теорема из лекции 2.

На основе этой теоремы можно вывести две формулы замены переменной в неопределенном интеграле.

Первая формула: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $\boxed{x = \varphi(t)}$, при которой переменная x принимается как дифференцируемая функция новой переменной t, и $\boxed{dx = \varphi'(t)dt}$ получается новый интеграл более простой для интегрирования:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Вторая формула: Если под знаком заданного интеграла можно выделить функцию $\varphi(x)$, *ее производную* $\varphi'(x)$ *и дифференциал* $\varphi'(x)dx$, такую, что после выбора в качестве новой переменной интегрирования $t = \varphi(x)$ новый интеграл приобретает более простой вид

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

3. Решение задач

1. Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{5 \operatorname{arctg} x - 7}}{1+x^2} dx$.

Решение. Основное затруднение связано с наличием в подкоренном выражении обратной тригонометрической функции. Найдем дифференциал подкоренного выражения и попробуем организовать его из части подынтегрального выражения

$$\int \frac{\sqrt[3]{5 \operatorname{arctg} x - 7}}{1+x^2} dx = \left| d(5 \operatorname{arctg} x - 7) = \frac{5\,dx}{1+x^2} \right| = \frac{1}{5}\int \sqrt[3]{5 \operatorname{arctg} x - 7}\,\frac{5\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\int (5 \operatorname{arctg} x - 7)^{1/3} d(5 \operatorname{arctg} x - 7) =$$

– интеграл принял форму табличного и используя его, получаем

$$= \left| \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| = \frac{1}{5}\,\frac{(5 \operatorname{arctg} x - 7)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{20}(5 \operatorname{arctg} x - 7)^{4/3} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x \sin(3x^2+1)\,dx$.

Решение. В данном примере наличие x^2 в аргументе функции позволяет, вычисляя дифференциал аргумента, увидеть, что его можно легко создать из части подынтегрального выражения: $\int x \sin(3x^2+1)\,dx =$

$$= \left| d(3x^2+1) = 6x\,dx \right| = \frac{1}{6}\int \sin(3x^2+1)\,6x\,dx = \frac{1}{6}\int \sin(3x^2+1)\,d(3x^2+1) =$$

– интеграл принял табличную форму и используя ее, находим

$$=\left|\int \sin x\ dx=-\cos x+C\right|=-\frac{1}{6}\cos\left(3x^2+1\right)+C\ .$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sqrt[3]{3x-7}\,dx$.

Решение.

$$\int \sqrt[3]{3x-7}\,dx=\frac{1}{3}\int \left(3x-7\right)^{1/3}\ d\left(3x-7\right)=\left|\int x^{\alpha}\ dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right|=\frac{1}{3}\,\frac{\left(3x-7\right)^{4/3}}{4/3}+C\ .$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Проведем замену переменной интегрирования $t = \sin x$, и, так как $dt = \cos x\, dx$, тогда:

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Пример 5. $\int x\left(x^2+1\right)^{3/2}dx.$

Замена $t=x^2+1;\quad dt=2xdx;\quad dx=\dfrac{dt}{2x};\ x=\sqrt{1-t}$ - обратная функция на промежутке строгой монотонности. Получаем:

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx=\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Пример 6.

$$\int x(x^2+1)^{-1}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C\ .$$

Пример 7. Вычислить интеграл $J = \int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{4-5e^{2x}}}\,dx$.

$$= ¿\left|4-5e^{2x}=t^3,\ \ x=\frac{1}{2}\ln\frac{4-t^3}{5}\ ¿\right|¿¿$$

$$¿$$

Решение. Сделаем замену J

$$= \int\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{4-5e^{2x}}}\,dx = -\frac{3}{10}\int t\,dt = -\frac{3}{10}\,\frac{t^2}{2}+C = -\frac{3}{20}\,t^2+C.$$

Замена оказалась удачной. Первообразная найдена, и осталось вернуться к старой переменной $J = \left|t=\left(4-5e^{2x}\right)^{1/3}\right| = -\frac{3}{20}\left(4-5e^{2x}\right)^{2/3}+C$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

Решение. Интеграл, очевидно, упростится, если удастся избавиться от радикала. С этой целью воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и сделаем замену переменной, положив

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = ¿\left|x=2\sin t,\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\ ¿\right|¿¿¿¿$$

$$¿$$

$$¿$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. В данном примере новую переменную желательно ввести так, чтобы все корни разом извлеклись. Для этого, очевидно, достаточно положить

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}\,dx = \left|x=t^6,\ dx=6\,t^5\,dt\right| = \int\frac{t^2}{t^4+t^3}\,6t^5\,dt = 6\int\frac{t^4}{t+1}\,dt = 6\int\left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$=6\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+C = \left|t=x^{1/6}\right| =$$

$$=6\left(\frac{x^{2/3}}{4}-\frac{x^{1/2}}{3}+\frac{x^{1/3}}{2}-x^{1/6}+\ln\left(x^{1/6}+1\right)\right)+C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) Непосредственное интегрирование

1. $\int \frac{x^3+2}{x}dx$	2. $\int \frac{2x+3}{x^4}dx$	3. $\int \frac{x^3+1}{x-1}dx$
4. $\int \frac{x^3+5x^2-1}{x}dx$	5. $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
7. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$	8. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$	11. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$	12. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$
13. $\int (2x+1)^{15}dx$	14. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$	15. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$
16. $\int \cos(ax+b)dx$	17. $\int \cos(3x-1)dx$	18. $\int 2\sin(5-2x)dx$
19. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x+1}+1}$	20. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$	21. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$

2) Замена переменной

22. $\int \frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$	23. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$	24. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+a^2}$
25. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$	26. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3 dx}{x^2+1}$	27. $\int \frac{\arcsin^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+9x^2}}$	29. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	30. $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x+5)}$
31. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$	32. $\int \frac{e^x dx}{(7-e^x)^2}$	33. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+a^2}$
34. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$	35. $\int \sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$	36. $\int \frac{a^x dx}{\sqrt{a^{2x}-1}}$

Разработал профессор кафедры высшей математики

Халидов И.А.