



Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие №02. Интегрирование по частям.

I. Учебные вопросы

1. Интегрирование по частям интегралов, содержащих произведение полинома на элементарные функции.

Сущность метода состоит в использовании формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

В интегралах рассматриваемого типа многочлен $P_n(x)$ принимается за u :

$$\int \underbrace{P_n(x)}_u \cdot \underbrace{\begin{cases} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases}}_{dv} \cdot dx, \quad (2)$$

Степень многочлена $P_n(x)$ понижается на единицу при каждом применении формулы (1), т.е. интегрирование по частям производится столько раз, какова степень этого многочлена (n).

2. Интегрирование по частям интегралов, содержащих логарифмы или обратные тригонометрические функции.

В интегралах этого типа указанные функции принимаются за u :

$$\int \underbrace{\begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{cases}}_u \cdot \underbrace{P_n(x)}_{dv} dx. \quad (3)$$

3. Интегрирование по частям интегралов, содержащих произведение показательных на элементарные тригонометрические функции.

В этом интеграле безразлично, какую функцию взять за u :

$$\int e^x \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} \cdot dx. \quad (4)$$

Интегрируя дважды по частям, приходим к исходному интегралу.

4. Решение задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x^2 \cdot e^x dx$.

Решение. Данный интеграл – первого типа, в подынтегральном выражении многочлен имеет степень 2 ($P_2(x) = x^2$), следовательно, интегрирование по частям производится два раза. Имеем

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right\} = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right\} = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \int e^x dx = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x^4 \ln x dx$.

Решение. Данный интеграл – второго типа, поэтому за u принимаем логарифм:

$$\begin{aligned}\int x^4 \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^4 dx; \quad v = \frac{x^5}{5} \end{array} \right\} = \frac{x^5}{5} \cdot \ln x - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^5}{5} \cdot \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C.\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \arcsin x dx$.

Решение. Аналогично примеру 2 за u принимаем арксинус:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x; \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx; \quad v = x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Решение.

$$\int e^x \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x; \quad du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right\} = \cos x \cdot e^x + \int e^x \sin x \, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x; \quad du = \cos x \, dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right\} = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Очевидно, что, дважды интегрируя по частям, мы пришли к исходному интегралу. Перенесем его в левую часть:

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x.$$

Окончательно получим:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) Интегралы первого типа

1. $\int x e^{-x} \, dx$	2. $\int x \sin 2x \, dx$	3. $\int x \cdot 3^x \, dx$
4. $\int x^2 e^{-x} \, dx$	5. $\int x^3 e^x \, dx$	6. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$
7. $\int (x^2 - 2x + 3) \cos x \, dx$	8. $\int x \cos^2 x \, dx$	9. $\int x \cdot \cos x \cdot \sin x \, dx$

2) Интегралы второго типа

10. $\int x \ln x \, dx$	11. $\int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx$	12. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$
13. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$	14. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx$	15. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx$
16. $\int \cos(ax + b) \, dx$	17. $\int \cos(3x - 1) \, dx$	18. $\int 2 \sin(5 - 2x) \, dx$
19. $\int x^3 \ln x \, dx$	20. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$	21. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

22. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	23. $\int \ln(x^2 + 1) dx$	24. $\int x^2 \ln(1+x) dx$
25. $\int \ln^2 x dx$	26. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$	27. $\int \arcsin^2 x dx$

3) Интегралы третьего типа

28. $\int e^{-2x} \cos 3x dx$	29. $\int e^x \sin^2 x dx$	30. $\int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx$
31. $\int e^{\arccos x} dx$		

**Разработал профессор кафедры
высшей математики**

Халидов И.А.