

Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие №03. Интегрирование дробно-рациональных функций.

I. Учебные вопросы

1. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби.

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют дробно-рациональные функции.

Известно, что всякая рациональная дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в общем случае

($n \geq m$) может быть представлена в виде многочлена и суммы *простейших дробей* двух типов, вид которых определяется корнями многочлена $Q_m(x)$:

I. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 1$ – целое положительное число);

II. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$;

$k \geq 1$ – целое положительное число).

Следовательно, интегрирование дробно-рациональной функции сводится к интегрированию многочлена, интеграл от которого является табличным, и простейших дробей.

Для того чтобы разложить дробь на сумму простейших дробей, необходимо:

1. *Разложить* знаменатель $Q_m(x)$ на линейные множители и квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами:

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\nu,$$

где $a, \dots, b, p, q, \dots, l, s$ – действительные числа;

$\alpha, \dots, \beta, \mu, \dots, \nu$ – натуральные числа;

дискриминанты трехчленов – отрицательные.

2. *Выписать* слагаемые искомого разложения, соответствующие линейным множителям $(x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta$:

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots +$$

$$\frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, B_2, \dots, B_\beta$ – подлежащие определению коэффициенты.

3. *Выписать* слагаемые искомого разложения, соответствующие квадратным трехчленам:

$$(x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu :$$

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \dots +$$

$$+ \frac{L_1x + J_1}{(x^2 + lx + s)} + \frac{L_2x + J_2}{(x^2 + lx + s)^2} + \dots + \frac{L_\nu x + J_\nu}{(x^2 + lx + s)^\nu},$$

где $M_1, M_2, \dots, M_\mu, N_1, N_2, \dots, N_\mu, \dots, L_1, L_2, \dots, L_\nu, J_1, J_2, \dots, J_\nu$ – подлежащие определению коэффициенты.

4. *Записать* равенство:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \dots + \frac{L_1x + J_1}{(x^2 + lx + s)} +$$

$$+ \dots + \frac{L_\nu x + J_\nu}{(x^2 + lx + s)^\nu} \quad . \quad (1)$$

и привести его правую часть к общему знаменателю. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в числителе дробей, получить систему уравнений для определения коэффициентов.

Изложенный метод называется *методом неопределенных коэффициентов*.

2. Интегрирование простейших дробей.

I тип: При $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C. \quad (2)$$

При $k \geq 1$:

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.} \quad (3)$$

II тип: При $k = 1$:

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.} \quad (4)$$

При $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{Ax+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \\ a^2=q-\frac{p^2}{4} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^k} dt = A \cdot \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из полученных интегралов. Первый интеграл сводится к табличному подведением под знак дифференциала, а именно:

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} &= \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^k} = \left\{ \begin{array}{l} t^2+a^2=u \\ 2tdt=du \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2} \int u^{-k} du = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + C. \end{aligned}$$

Ко второму интегралу можно применить рекуррентную формулу:

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \quad (n > 1)}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что интегралы от простейших дробей обоих типов выражаются через рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.

3. Решение задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию $f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$.

Она представляет собой неправильную рациональную дробь, т. к. степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя. Делением «уголком» выделим целую часть дроби, представляющую собой многочлен, а оставшуюся правильную рациональную дробь разложим на простейшие в соответствии с корнями знаменателя $Q_3(x)$. Будем иметь:

$$\begin{array}{r}
 - \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^5 - 4x^3} \left| \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x + 4} \right. \\
 \hline
 x^4 + 4x^3 - 8 \\
 - \frac{x^4 - 4x^2}{x^4 - 4x^2} \\
 \hline
 4x^3 + 4x^2 - 8 \\
 - \frac{4x^3 - 16x}{4x^3 - 16x} \\
 \hline
 4x^2 + 16x - 8
 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + 4 \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}.$$

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A(x^2 - 4) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)}{x(x - 2)(x + 2)} = \\
&= \frac{(A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A}{x(x - 2)(x + 2)}.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неопределенных коэффициентов A, B, C :

$$\begin{cases} A + B + C = 1; \\ 2B - 2C = 4; \\ -4A = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,5; \\ B = 1,25; \\ C = -0,75. \end{cases}$$

Итак, подынтегральная функция может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} &= x^2 + x + 4 + 4\left(\frac{0,5}{x} + \frac{1,25}{x - 2} + \frac{-0,75}{x + 2}\right) = \\
&= x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, интегрирование исходной функции сводится к интегрированию многочлена и трех простейших дробей I типа.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2}\right) dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x - 2| - 3 \ln|x + 2| + C = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x - 2)^5}{(x + 2)^3} \right| + C.
\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 + x^3}$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию: $f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$.

Она представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим ее на простейшие в соответствии с корнями знаменателя $Q_3(x)$. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} = \\ &= \frac{A(1-x+x^2) + Bx(x+1) + C(x+1)}{1+x^3}.\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов

$$A, B, C: \quad \begin{cases} A+B=0; \\ -A+B+C=0; \\ A+C=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3}; \\ B=-\frac{1}{3}; \\ C=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^3} &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{1-x+x^2} dx, \\ \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{-x+2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{-\left(t+\frac{1}{2}\right)+2}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \\ &= -\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}, \\ \int \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) Простейшие дроби первого типа

1. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$	2. $\int \frac{x^3 dx}{x+1}$	3. $\int \frac{(3-4x)dx}{2x^2-3x+1}$
4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$	5. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$	6. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$
7. $\int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$	8. $\int \frac{x dx}{x^4-3x^2+2}$	9. $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$

2) Простейшие дроби второго типа

10. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$	11. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$	12. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$
13. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$	14. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx$	15. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$
16. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$	17. $\int \frac{dx}{1+x^4}$	18. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$
19. $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} dx$	20. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx$	21. $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$
22. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$	23. $\int \frac{dx}{x^3+8}$	24. $\int \frac{x^9 dx}{(x^4-1)^2}$
25. $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$	26. $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)} dx$	27. $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2} dx$

**Разработал профессор кафедры
высшей математики**

Халидов И.А.