Раздел № 03. Интегрирование функций одной переменной.

Тема № 3.1. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие №04. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование дифференциальных биномов. Интегрирование тригонометрических функций.

I. Учебные вопросы

1. **Интегрирование иррациональных функций.**

Некоторые классы иррациональных функций интегрируются методом замены переменных.

В частности, интеграл вида

$$I = \int f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \qquad (1)$$

где a, b, c, d – постоянные вещественные числа, такие, что $ad - bc \neq 0$; $m, n, \dots, q$ – целые числа, а функция f – рациональная относительно всех своих аргументов, берется в конечном виде с помощью замены переменной интегрирования $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$.

Интегрирование квадратичных иррациональностей вида:

$$I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx, \qquad (2)$$

где a, b, c – постоянные вещественные числа, а функция f – рациональная относительно обоих своих аргументов, можно выполнить двумя способами.

1) Подстановки Эйлера. При $a > 0$ делаем замену: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ (это – так называемая *первая подстановка Эйлера*). При $a < 0$, если трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет вещественные различные корни x_1 и x_2, т.е. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, делаем замену: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$ (это – *вторая подстановка Эйлера*). Обе подстановки Эйлера приводят к интегралам от рациональных функций.
2) Тригонометрические и гиперболические подстановки. Выполнив в интеграле (2) замену $\boxed{u = x + \frac{b}{2a}}$, приведем его к одной из следующих трех форм:

а) $\int R\left(u, \sqrt{a^2 - u^2}\right) du$, тогда к интегралам от рациональных функций приводит тригонометрическая подстановка $u = a \cdot \sin t$.

б) $\int R\left(u, \sqrt{a^2 + u^2}\right) du$, тогда к интегралам от рациональных функций приводит тригонометрическая подстановка $u = a \cdot \mathrm{tg}\, t$.

в) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 - a^2}\right) du$, тогда к интегралам от рациональных функций приводит гиперболическая подстановка $u = a \cdot \mathrm{ch}\, t$.

2. **Интегрирование дифференциальных биномов (биномиальных дифференциалов).**

Пусть имеется интеграл вида:

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p \, dx, \tag{3}$$

где m, n, p – рациональные числа: $m = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $n = \dfrac{\gamma}{\delta}$, $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ – целые числа); a и b – постоянные вещественные числа. Подынтегральное выражение в (3) носит название *биномиального дифференциала*.

Интеграл (3) берется в конечном виде, если оказывается целым хотя бы одно из следующих трех чисел: p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n} + p$. Во всех иных случаях интеграл типа (3) в конечном виде не берется. Это было установлено П.Л. Чебышёвым, имя которого носят рассматриваемые далее подстановки.

1. Пусть p – целое.

В этом случае делаем замену: $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное чисел β и δ. При такой замене имеем: $x^m = t^{\frac{N}{\beta}\alpha} = t^{\tilde{m}}$, где $\tilde{m}$ – целое; $x^n = t^{\frac{N}{\delta}\gamma} = t^{\tilde{n}}$, где $\tilde{n}$ – целое; $dx = Nt^{N-1} dt$. Получаем, следовательно,

$$I = N \int t^{\tilde{m}} (at^{\tilde{n}} + b)^p t^{N-1} dt = N \int \tilde{f}(t) \, dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция, а такой интеграл берется в конечном виде.

2. Пусть $\dfrac{m+1}{n}$ – целое.

В этом случае замена $ax^n+b=t^{\mu}$ (μ – знаменатель числа p) дает:

$$x=\left(\frac{t^{\mu}-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}};\quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{t^{\mu}-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\mu}{a}t^{\mu-1}dt;\quad (ax^n+b)^p=t^{\mu\cdot p}=t^{\mu\cdot\frac{\lambda}{\mu}}=t^{\lambda}.$$

Получаем, следовательно,

$$I=\frac{\mu}{an}\int t^{\lambda+\mu-1}\left(\frac{t^{\mu}-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dt=\frac{\mu}{an}\int\widetilde{f}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{f}(t)$ – рациональная функция, а такой интеграл берется в конечном виде.

3. Пусть $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

В этом случае замена $\dfrac{ax^n+b}{x^n}=t^{\mu}$ (μ – знаменатель числа p) дает:

$$a+bx^{-n}=t^{\mu}\quad\Rightarrow\quad x=\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}};\quad dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\mu}{b}t^{\mu-1}dt;$$

$$(ax^n+b)^p=(x^nt^{\mu})^p=x^{np}t^{\mu p}=\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{-p}t^{\lambda}.$$

Получаем, следовательно,

$$I=-\frac{\mu}{bn}\int t^{\lambda+\mu-1}\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1}dt=-\frac{\mu}{bn}\int\widetilde{f}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{f}(t)$ – рациональная функция, а такой интеграл берется в конечном виде.

3. Интегрирование тригонометрических функций.

Пусть имеется интеграл вида:

$$I=\int f(\sin x,\cos x)\,dx, \tag{4}$$

где f – рациональная функция относительно обоих своих аргументов.

Покажем, что интегралы типа (4) всегда берутся в конечном виде. С этой целью сделаем замену, положив

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{2}=\operatorname{arctg} t \quad\Rightarrow\quad x=2\operatorname{arctg} t \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и, следовательно, будем иметь

$$I=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(t)$ – рациональная функция аргумента t (ибо рациональная функция от рациональных функций представляет собой также рациональную функцию). А такой интеграл, как мы знаем, берется в конечном виде.

4. Решение задач

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\frac{\sqrt{x+5}}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{x+5}\right)^4}\,dx$, $x\in(-5,+\infty)$**.**

Решение. Делаем замену: $x+5=t^6 \;\Rightarrow\; dx=6t^5dt$. Тогда

$$I=\int\frac{t^3\cdot 6t^5}{(t^3+t^2)^4}\,dt=6\int\frac{t^8dt}{t^8(t+1)^4}=6\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^4}=-\frac{2}{(t+1)^3}+C.$$

Возвращаясь к прежней переменной, получаем

$$I=-\frac{2}{\left(\sqrt[6]{x+5}+1\right)^3}+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}$.

Решение. Делаем замену (первая подстановка Эйлера):

$$\sqrt{x^2+\lambda}=t-x \quad\Rightarrow\quad x^2+\lambda=t^2-2tx+x^2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{t^2-\lambda}{2t};$$

$$dx=\frac{t^2+\lambda}{2t^2}dt,\quad \sqrt{x^2+\lambda}=t-\frac{t^2-\lambda}{2t}=\frac{t^2+\lambda}{2t}.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{(t^2+\lambda)\cdot 2t}{2t^2(t^2+\lambda)}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$$

У нас $t=x+\sqrt{x^2+\lambda}$. Поэтому

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right|+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Решение. Запишем интеграл I в виде: $I=\int(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}dx$. Это биномиальный дифференциал, здесь $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$. Имеем:

1) $p=-\frac{1}{3}$ – не целое число.

2) $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}$ – не целое число.

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$ – целое число $\Rightarrow$ Данный интеграл берется в конечном виде (имеет место третий случай) путем замены Чебышева:

$$\frac{x^3+1}{x^3}=t^3\ \Rightarrow\ 1+x^{-3}=t^3\ \Rightarrow\ x^{-3}=t^3-1\ \Rightarrow\ -3x^{-4}dx=3t^2dt\ \Rightarrow\ dx=-x^4t^2dt.$$

$$(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}dx=(x^3t^3)^{-\frac{1}{3}}(-x^4t^2)\,dt=-x^{-1}t^{-1}x^4t^2dt=-x^3t\,dt=-\frac{t\,dt}{t^3-1}.$$

Получаем, следовательно,

$$I=-\int\frac{t\,dt}{(t-1)(t^2+t+1)}=-\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right]dt=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{3}\int\frac{(t-1)\,dt}{t^2+t+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{3}\int\frac{(2t+1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

где $t=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x}$, $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

Решение. Делаем замену: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \quad\Rightarrow\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Будем иметь, следовательно,

$$I=\int\frac{(1+t^2)\cdot 2}{2t(1+t^2)}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C \quad\Rightarrow\quad I=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) Интегрирование иррациональных функций

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$	2. $\int\sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}\,dx$	3. $\int\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$
4. $\int\frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$	5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$	6. $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$	8. $\int\frac{\sqrt{x^2-81}}{x}\,dx$	9. $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$

2) Интегрирование дифференциальных биномов

10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	11. $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$	12. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

3) Интегрирование тригонометрических функций

13. $\int tg^4x\,dx$	14. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}5x}}{\cos^2 5x}\,dx$	15. $\int\frac{dx}{\cos^4 3x}$

16. $\int \sin^{1/3} x \cdot \cos^5 x \, dx$	17. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$	18. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 2x}}{\cos^2 2x} dx$
19. $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2} dx$	20. $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$	21. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin x - 2} dx$

Разработал профессор кафедры

высшей математики

Халидов И.А.