Раздел № 01 Линейная алгебра

Тема № 03 Матрицы и операции с ними.

Лекция № 03

## Учебные вопросы:

1. Введение.
2. Линейное пространство числовых матриц.
3. Умножение матриц и его свойства.
4. Транспонирование матриц и его свойства.
5. Обратные матрицы и их свойства

Литература

1. Сборник задач по математике в четырех частях. Под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича
2. Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики.
3. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
4. **Введение**

На предыдущей лекции мы познакомились с минорами, алгебраическими дополнениями, а также с определителями высших порядков. Заметим, что определители существуют только у квадратных матриц. Перейдем теперь к изучению матриц произвольного размера.

**2. Линейное пространство числовых матриц.**

**Определение 1.** Числовой матрицей размера называется прямоугольная таблица чисел:

,

Обычно матрицы обозначаются большими латинскими буквами, а ее элементы – теми же буквами, но прописными. Как обычно, первый индекс обозначает номер строки, второй индекс – номер столбца, в котором находится элемент Матрицу коротко обозначают , а если важно знать размеры матрицы, то пишут

**Определение 2.** Две матрицы

и называются равными, если они имеют одинаковые размеры, при этом соответствующие элементы равны, то есть

**Замечания.**

* При *т=п* матрица называется квадратной.
* Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы равны нулю, кроме находящихся на главной диагонали
* Единичные матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1.

**Линейные операции с матрицами**

**Определение 3.** Суммой двух матриц *А* и *В* одинакового размера называется матрица *С* того же размера, элементы которой есть суммы соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е.

**Определение 4.** Произведением матрицы *А* размера *m×n* на вещественное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λ*A*, элементы которой есть произведения соответствующих элементов матрицы *А* на это число λ.

**Свойства линейных операций с матрицами**

1. **(коммутативность суммы)**
2. **(ассоциативность суммы)**
3. Для любой матрицы *А* существует единственная матрица, называемая нуль-матрицей *О*, такая что
4. Для любой матрицы *А* существует единственная матрица (– *A*), называемая противоположной, такая что
5. , где.

**Важные замечания**

* Все эти равенства понимаются в том смысле, что если определена левая часть равенства, то определена и правая, и наоборот.
* Для вещественных чисел все эти свойства 1) – 8) являются аксиомами. В случае матриц они требуют доказательств.
* Множество математических объектов, на котором определены операции сложения и умножения на число, при этом выполняются свойства 1) – 8), называется **линейным пространством**.
* Множество матриц одинакового размера является линейным пространством, которое обычно обозначается

1. **Умножение матриц и его свойства.**

Начнем с частного случая умножения матрицы-строки на матрицу-столбец.

**Определение 5.** Произведением матрицы на матрицу называется матрица , ее единственный элемент

**Определение 6.** Произведением матрицы *А* размера *m×k* на матрицу *В* размера *k×n* называется матрица *С*  размера *m×n*, элемент которой *cij*, стоящий в *i*-ой строке и в *j*-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки матрицы *А* и *j*-ого столбца матрицы *В*:

Чтобы найти элемент нужно умножить -ю строку матрицы *А*, которая записана слева, на -ый столбец матрицы В, записанной в произведении справа. Правило умножения матриц изображено на следующем рисунке 1.

Рис. 1. Правило умножения матриц.

*A*

*B*

*C=AB*

*i*

*j*

*i*

*j*

**Замечание.** Легко заметить, что в зависимости от размеров матриц, возможна ситуация, что их произведение или не определено, или, возможно, матрицы в произведении нельзя переставлять местами. Либо не будут соответствовать их размеры, либо в результате умножения будут получаться матрицы разных размеров. И даже в случае, когда умножаются квадратные матрицы одинакового порядка, результат может оказаться разным. Так что коммутативности матричного умножения нет, то есть в общем случае Если же , то такие матрицы называются коммутирующими.

**Свойства матричного умножения**

1. **(ассоциативность умножения)**
2. , где
3. **(дистрибутивность при умножении справа)**
4. **(дистрибутивность при умножении слева)**
5. Если матрица *А* имеет размер *m*×*n*, то равенство справедливо только, если – единичные матрицы *m*-го и *n*-го порядка.

**Теорема 1.** (Об определителе произведения двух квадратных матриц)

Если *А* и *В* – квадратные матрицы *п*-го порядка, то

1. **Транспонирование матриц.**

**Определение 7.** Пусть дана матрица , матрица

является транспонированной по отношению к матрице *А*.

Элементы транспонированной матрицы обозначаются . Заметим, что

**Свойства операции транспонирования**

1. **Обратная матрица.**

**Замечание.** Итак, мы научились определять равенство матриц, складывать матрицы одинаковых размеров, умножать любую матрицу на число, транспонировать матрицы, а также умножать матрицы подходящих размеров. Но, важно понимать, что делить на матрицу нельзя. В некоторых случаях можно применять операцию, напоминающую деление, – умножение на обратную матрицу.

**Определение 7.** Пусть *А* – квадратная матрица. Обратной матрицей называется матрица , такая, что .

**Теорема 2.** (Необходимое условие существования обратной матрицы)

Если квадратная матрица *А* имеет обратную, то .

**Доказательство:**

**Определение 8.** Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется неособенной или невырожденной.

**Следствие из теоремы 2.** Если матрица вырожденная, то она не имеет обратной.

**Теорема 3.** (О существовании и единственности обратной матрицы)

Всякая невырожденная квадратная матрица *А* *n*-го порядка имеет единственную обратную матрицу *A*–1, для которой справедливо равенство

где алгебраическое дополнение элемента матрицы *А*.

(Доказательство теоремы проводится непосредственно с использованием теоремы о разложении определителя по строке (столбцу) и следствия из этой теоремы.) Единственность доказывается от противного.)

**Замечания.**

* + Матрица называется присоединенной к матрице *А*. Это транспонированная матрица алгебраических дополнений.
  + Матрица, обратная к квадратной невырожденной матрице второго порядка находится очень просто. Элементы, стоящие на главной диагонали, меняются местами, а элементы побочной диагонали меняют знак. И не забываем умножить на число, обратное определителю этой матрицы. Например,

**Свойства обратной матрицы**

1. Матрица, обратная к диагональной матрице, тоже диагональная.
2. Матрица, обратная к треугольной матрице, тоже треугольная.

Разумеется, все перечисленные выше свойства касаются квадратных невырожденных матриц, при этом матрицы *А* и *В* имеют одинаковые размеры.

**Разработал доцент кафедры высшей математики М. В. Лагунова**